

筑波大学大学院博士課程

システム情報工学研究科修士論文

回転対称性を持つ平坦折り可能な展開図の  
一般化に関する研究

唐 爽

修士（工学）

（コンピュータサイエンス専攻）

指導教員 三谷 純

2015年3月

## 概要

折り紙とは、紙を使って物や動物の形を作る日本の伝統的な遊びであり、また、その遊びで使われる紙のことを指すこともある。折り紙の研究は数学と教育だけではなく、工学設計と芸術デザインなどの応用としても注目されている。新しい折り紙作品の創出には、専門知識と十分な経験とが必要であると考えられてきたが、近年では折り紙の数理の発展に伴い、設計のためのアルゴリズムやソフトウェアが登場し、それらを用いて折り紙をデザインすることが可能になった。

一般的な折り紙は、正方形の紙が多く、角と角、辺と辺を合わせて折る折り方が普通である。ゆえに、正方形から左右対称や4回回転対称性を持つ形を作るのは容易であり、伝統的な作品も含め、多くの作品が知られている。

しかし、近年のデジタルファブリケーションの発展で、コンピュータを用いて折り紙を設計し、カッティングプロッタで自由な形に紙を切り出し、同時に折り筋を付けることが可能となった。したがって、今までの「紙の形は正方形である」という制約はなくなり、折り方も、紙の角や辺を参照せずに折ることが可能となった。その結果、正方形の紙を用いない、新しい折り紙の創作を支援できるようになった。

そこで本研究は、正方形の紙から作り出される4回回転対称性を持つ平坦折り紙作品を基に、4回回転対称性を持つ展開図の一般化を目的とする。既知の作品を多角形に変換することで、様々なバリエーションを作り出すことができる。N回回転対称性を持つ平坦折り紙作品を設計する方法を探し出し、様々な新しい折り紙を作り出すことを目指す。

本研究の提案手法を用い、18種類の4回回転対称性を持つ平坦折り紙の展開図を一般化し、その結果の平坦折り可能性を検証した。対応できる4回回転平坦折り紙から、59の新しい作品ができた。一枚の紙で任意のN回回転平坦折り紙を作るのは困難であるが、生成された展開図を用い、簡単にできることがわかった。

# 目次

<b>第1章</b>	<b>はじめに</b>	<b>1</b>
1.1	折り紙の基礎	1
1.2	研究目的	3
1.3	提案手法の概要	5
1.4	論文の構成	6
<b>第2章</b>	<b>関連研究</b>	<b>7</b>
2.1	折り紙の数理	7
2.2	折り紙設計	8
2.2.1	手で折る折り紙	9
2.2.2	数理的なアルゴリズムを用いる折り紙デザイン	10
2.3	計算折り紙	13
2.3.1	折り紙形状推定	13
2.3.2	折り紙製作支援	14
2.4	本研究に関する既存手法	14
<b>第3章</b>	<b>4回回転対称性を持つ折り紙</b>	<b>16</b>
3.1	対称の種類	16
3.2	対称性を持つ折り紙	18
3.3	4回回転対称折り紙作品についての調査	18
<b>第4章</b>	<b>N回回転対称への変換</b>	<b>21</b>
4.1	展開図の分割	21
4.2	1/N ユニットの作成	22
4.2.1	重心座標系	22
4.2.2	ユニットの変形	23
4.3	N回回転対称展開図の作成	24
<b>第5章</b>	<b>平坦折り可能性のための数値的最適化</b>	<b>27</b>
5.1	平坦折り可能性についての判断	27
5.2	頂点位置の調整	28
5.3	近似値の求め方	28

<b>第 6 章</b>	<b>実装と結果</b>	<b>30</b>
6.1	システム . . . . .	30
6.2	結果例 . . . . .	30
6.3	考察 . . . . .	31
<b>第 7 章</b>	<b>まとめと今後の課題</b>	<b>34</b>
7.1	まとめ . . . . .	34
7.2	今後の課題 . . . . .	34
	謝辞	<b>36</b>
	参考文献	<b>37</b>

# 目次

1.1	山折りと谷折り	2
1.2	鶴とその展開図	2
1.3	ユニット折り紙の例	3
1.4	折り紙の6つの基本形	4
1.5	提案手法フローチャート	5
2.1	局所的平坦折り必要条件を満たす折り紙の例	8
2.2	自己干渉による平坦に折り畳めない展開図の例	9
2.3	伝統的な折り紙	9
2.4	新しい創作折り紙	10
2.5	TreeMaker	11
2.6	平織りの例と Tess の画面	11
2.7	Polygon Symmetry Systems	12
2.8	立体折り紙設計	12
2.9	ORIPA と Rigid Origami Simulator の画面	14
3.1	線対称性を持つ図形	17
3.2	正三角形の回転対称性	17
3.3	自然界の回転対称性を持つ物体	18
3.4	並進対称性模様	18
4.1	折り線と垂線との位置関係により分けられた3つの Type	21
4.2	重心座標系	22
4.3	アフィン変換のイメージ	23
4.4	分割方法 Type A で分割された 1/4 ユニットの 1/5 ユニットに変形する例	24
4.5	Type B の 1/4 ユニットの三角形の一部とするイメージ	24
4.6	分割方法 Type B で分割された 1/4 ユニットの 1/5 ユニットに変形する例	25
4.7	Type A のユニットから5回回転対称展開図の作成例	25
4.8	Type B のユニットから5回回転対称展開図の作成例	26
5.1	折り線の調整	29
6.1	インターフェース	30

6.2	Type A の例：Table と 7 回回転させた結果 . . . . .	31
6.3	Type B の例：Table と 6 回回転させた結果 . . . . .	32
6.4	数値的最適化の使用前後の比較 . . . . .	32
6.5	「めんこ」を 5 回回転させた後の結果 . . . . .	33
6.6	タトウの例 . . . . .	33
7.1	箱と 7 回回転させた後の展開図とその完成図 . . . . .	35
7.2	花の N 回回転試作 . . . . .	35

# 第1章 はじめに

折り紙は、「紙」を「折る」という簡単な動作から生まれている。折り紙は一枚や複数枚の紙を利用し、植物や動物などの形を作るという遊びだと知られている。1980年代から折り方のテクニックは高度になり、細部まで作りこまれた作品が創作されてきた。近年の折り紙作品は古典的な折り紙にはない、複雑な構造をもつことができる。また、芸術的な側面も評価されている。こうした近年の折り紙の発展は、折り紙に対する数学とコンピュータサイエンス的な理解がもたらしたものと考えられる [1]。

本章では、折り紙の基礎を紹介し、この研究のモチベーションと目標を述べ、提案手法を概説する。最後に、この論文の構成を紹介する。

## 1.1 折り紙の基礎

一般的な折り紙は、1枚の紙から作られたものである。1枚の紙は2次元の薄い面で、通常は平坦である。使用されている紙は「正方形である」と仮定されることが多いが、数学的に扱うときは「平面全体」と考えたほうが便利である。本節では、折り紙に関するいくつかの基本定義を説明する。

### 折り線

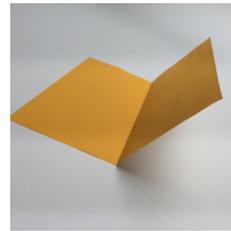
折り線（または折り目、crease）とは、紙の上の線分（ときには曲線）である。折り線には、山折り（mountain fold）と谷折り（valley fold）の2種類がある。図 1.1 に示すように、一枚の紙を一直線の折り線に沿って折るとき、折った後の形が山の形になる場合、折り線を山折りという。これに対して、折った後の形が谷の形になる場合、折り線を谷折りという。本論文では、赤い破線で山折りを表し、青い直線で谷折りを表すこととする。

### 展開図

折り紙の展開図（crease pattern）とは、折り紙の完成形で折られている線を表す平面グラフのことである。または折り目パターンと呼ばれている。折り紙の最終折り状態（final folded state）を展開すれば、その折り紙の展開図が得られる。図 1.2 は、伝統的な鶴の折り紙作品とその展開図を示す。



[a] 山折り

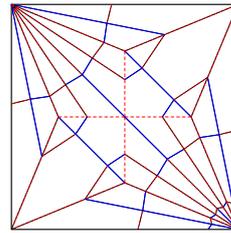


[b] 谷折り

図 1.1: 山折りと谷折り



[a] 完成図



[b] 展開図

図 1.2: 鶴とその展開図

## 山谷割当て

折り線の山谷が未知な展開図が与えられたとき、それぞれの折り線について山折りなのか谷折りなのかを特定することは、山谷割当て (mountain-valley assignment) と呼ばれる。展開図に山谷割当てを加えたものは山谷つき展開図 (mountain-valley pattern) と呼ばれる。本論文では、すべての展開図は山谷つき展開図と最終折り状態だけを示すことにする。

## 平坦折り紙と立体折り紙

折り紙の数学研究では、ほとんどの関心が平坦折り紙に集まるといっても過言ではない。平坦折り紙とは、紙を平坦に折り畳むことで、最終的な形は本に挟むことができるものである。すなわち、2次元の紙から生まれた2次元の作品のことである。それに対して、紙から作られる3次元の折り紙作品は立体折り紙と呼ばれる。

また、複数枚の紙を用いて作られるユニット折り紙の中にも、平坦折り紙と立体折り紙作品はたくさん存在するが (図 1.3)、本論文では、1枚の紙から作られた折り紙のみを取り扱う。

## 折り紙の折り可能性

一般に折り紙の折り可能性 (foldability) とは、与えられた折り線で紙が折れるかどうか問題である。折り紙は平坦に折られる場合が多いので、平坦に折れる場合の折り可能性問題 (flat



図 1.3: ユニット折り紙の例

foldability) つまり、「与えられた展開図を平坦に折ることができるだろうか」という問題はよく研究されている [1]。

## 折り紙基本形

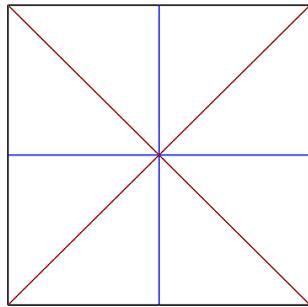
折り紙の基本形とは、「型」のような存在であり、それに基づいて色々な折り紙作品が作り出される汎用性の高い形のことである。基本形は単なる便利な中間形にすぎず、その構成要素に対する明確な定義は存在しない。しかし、単純な基本形からいろいろな形が作り出される。図 1.4 に示すのは、よく使われている 6 つの基本形である [1]。

## 1.2 研究目的

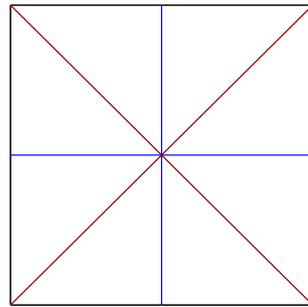
一般的な折り紙は、正方形の紙が多く、角と角、辺と辺を合わせて折るという折り方が普通である。前節で紹介した折り紙基本形のような正方形から左右対称な形や 4 回回転対称性を持つ形を作るのは容易である。

しかし、近年のデジタルファブリケーションの発展で、コンピュータを用いて折り紙を設計し、カッティングプロッタで自由な形に紙を切り出し、同時に折り筋を付けることが可能となった。したがって、今までの「紙の形は正方形である」という制約はなくなり、折り方も、紙の角や辺を参照せずに折ることが可能となった。その結果、正方形の紙を用いない、新しい折り紙の創作を支援できるようになった。

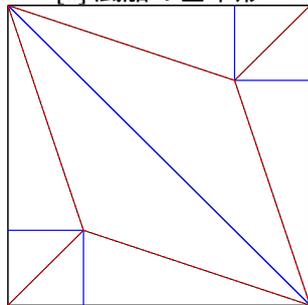
本研究は、正方形の紙から作り出される 4 回回転対称性を持つ平坦折り紙作品を基に、その展開図を一般化に関する研究である。紙の形を特定せず、 $N$  回回転対称性を持つ折り紙作品を設計する方法を提案し、様々な新しい折り紙を作り出すことを目指している。



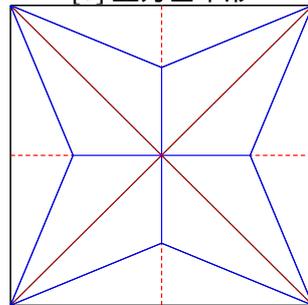
[a] 風船の基本形



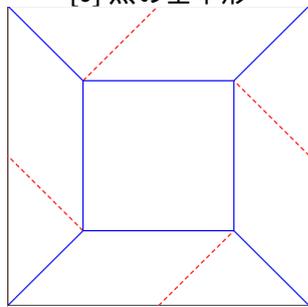
[b] 正方基本形



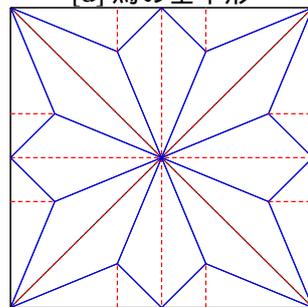
[c] 魚の基本形



[d] 鳥の基本形



[e] 風車の基本形



[f] 蛙の基本形

図 1.4: 折り紙の 6 つの基本形

### 1.3 提案手法の概要

前節までは折り紙の基本用語とこの研究の目的を紹介した。本節では、研究で提案した手法の概要を説明する。

まず、4回回転対称の平坦折り紙の展開図（山谷割り当てつき）を入力する。次に、展開図の1/4を抽出し、1つのユニットとしてN回回転対称の形になるように変形する。そして、生成された展開図が平坦折り条件を満たすかを判断する。条件を満たさない場合は、展開図に含まれる折り線の位置の位置を修正し、平坦折り条件を満たせるよう調整する。最後に、条件を満たした展開図を表示する。図 1.5 は提案手法のフローチャートを示す。

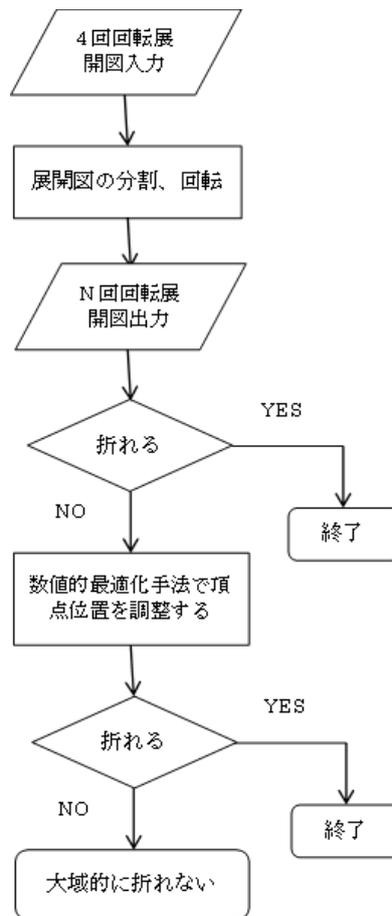


図 1.5: 提案手法フローチャート

## 1.4 論文の構成

この論文の構成を紹介する。第2章では、この研究に関連する研究を紹介する。第3章では、今回の研究対象となる4回回転対称性を持つ折り紙を紹介し、既存の4回回転対称折り紙についての調査結果を説明する。第4章と第5章では、提案手法について詳細に説明する。第4章では、展開図の分割方法とN回回転対称性を持つ展開図の作成方法を説明する。第5章では、作成した展開図は平坦に折り畳めない場合行われる数値的アルゴリズムを紹介する。第6章では、提案手法の実装と結果を示し、考察を行う。第7章では、まとめと今後の展望を述べる。最後の付録には、今回の提案手法で得た折り紙作品の展開図と最終状態の形を示す。

## 第2章 関連研究

本章では、本研究に関連する折り紙の研究を紹介する。第1節では、折り紙の数理に関する研究、第2節では、折り紙設計に関する研究、第3節では、コンピュータ折り紙に関する研究を解説する。

### 2.1 折り紙の数理

「折り紙の数理」とは、折り紙を数学的にモデル化して、折り紙についての「なぜ」を知ることである。幾何学と折り紙の間にあるつながりを明らかにすることは、折り紙の数理に関する研究の目標である。折り紙の数理の研究で最近発展したものに、折り紙をコンピュータで調べる際の複雑さに関する問題がある。すなわち、与えられた展開図が平坦折り畳めるかどうか、またそれをコンピュータが判定するのにどのくらい時間がかかるかを調べるのである。

本節では、折り紙の数理に関する研究の中に、本研究に関連とする折り紙の平坦折り可能性に関する研究を紹介する。

#### 平坦折り可能性

一枚の紙を平坦に折るとは、折り線に沿って多層的に、かつ平らになるように折ることである。平坦折りは一番容易な折り方だと思われるが、任意の展開図が平坦折り可能 (flat foldable) というわけではない。折り紙の研究では、折った後に得られる形が平坦になるかに関する問題がよく研究される。実際に紙を折る時、折りのわずかなずれや、紙の厚みなど原因で完全に平らな形にならないことも多い。しかし数学的には、こうしたずれや厚みなどを無視し、平坦折りのモデルは完全に折り畳めることにする [2]。

#### 局所的平坦折り可能性

局所的平坦折り可能性 (Local flat-foldability) は展開図内部の任意の一つの頂点 (折り線の交点) に着目する。一つの頂点とそれに付随する辺だけを含み、他の頂点や辺を含まない領域を切り出したときに、その領域が平坦折り可能であるかどうかを検証する問題である。

切り出された領域を一枚の紙にすると、頂点周りの折り線の角度の和は  $360^\circ$  である。このような単頂点折り紙の平坦折り可能性を判定するための条件はいくつか存在する [3]。1986

年、平坦に折り畳める折り紙の一つの頂点の周りにおける山折りと谷折りの数の差は2であることを、前川が証明した [4]。この性質は「前川定理」として知られている。1989年、川崎が単頂点平坦折り紙展開図の角度列と折り線との間関係を証明した [5]。一つは「1つおきの内角の和は180度」である。これは「川崎定理」と知られている。もう一つは「ある角度  $\alpha_i$  について、もし  $\alpha_i$  は隣接している2つの角度より小さいであれば、 $\alpha_i$  の境界の2つの折り線は逆の山谷割当てをもつ」ことである。これらの定理を利用し、Hull が山谷のつけ方が何通りかあるかが線形時間で計算できることを示した [6]。

図 2.1 に示すのは、上記3つの定理に満たす折り紙の例である。

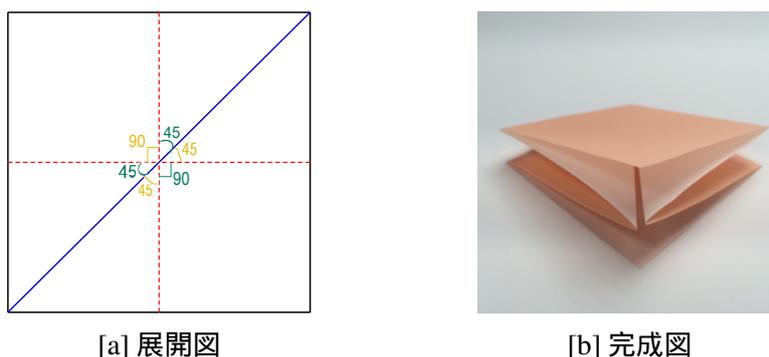


図 2.1: 局所的平坦折り必要条件を満たす折り紙の例

## 大域的平坦折り可能性

川崎定理と前川定理は、単頂点折り紙が局所的にどんなときに平坦に折り畳めるかを説明している。しかし、頂点ごとにこの二つの定理を満たしながら、平坦に折り畳めない展開図がある。有効な山谷割当てを指定しても平坦折り畳みに失敗する原因は、紙のいくつかの面が互いに交差してしまうことにある。このような展開図は、大域的平坦に折れないと呼ぶ。それぞれの頂点が独自に局所的平坦折り可能でも、すべての頂点が局所的に平坦折り可能となる大域的な山谷割当てが存在するかを判断するのはとても難しい。この問題は強 NP 問題であることが証明され、いまだに効率良く解くアルゴリズムが存在しない [7]。

図 2.2 に示すのは自己干渉によって平坦に折り畳めない展開図の例である。図 2.2 の黄色い部分は、折り線に分割された3つの領域の中で、一番左の領域を表す。左側の谷折り線を平坦折った後、紙の一番右の領域と重なる部分があるため、右側の谷折り線を平坦に折り畳める時、必ず黄色い部分との衝突が発生する。

## 2.2 折り紙設計

折り紙設計 (origami design) とは、ある性質や特定の形をもつように与えられた紙を折る問題である。目指す形を決め、紙で折れるようなものにうまくデザインすることが目的とな

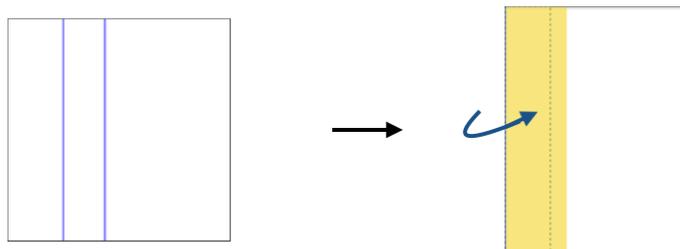


図 2.2: 自己干渉による平坦に折り畳めない展開図の例

る [8]。本節では、折り紙設計について、伝統的な手法から、幾何学を用いる新しい方法までいくつかの研究を紹介する。

### 2.2.1 手で折る折り紙

一般的には、角度を計算しやすくするために一枚の正方形を使うことが多い。しかし、作品によって長方形の紙を使う場合もある。また、複雑な造形のため複数枚の紙を使う場合もある。

#### 伝統的な折り紙

折り紙の起源は明らかになっていないが、紙そのものの発明とほぼ同時期に生まれたと考えられる。日本における折り紙の歴史は詳しく記録されている。現在の形での折り紙は室町時代（1333年～1573年）に発明されたと信じられている。折り紙について書かれた最も古い本は1682年のものであり、1797年には有名な「秘傳千羽鶴折形」が出版されている [1]。また、日本では折り紙を2種類に大きく分けることができる。1つ目は一般に知られている折り鶴などの折り紙は遊戯折り紙（図 2.3[a]）であり、2つ目は礼儀折り紙（図 2.3[b]）である [9]。

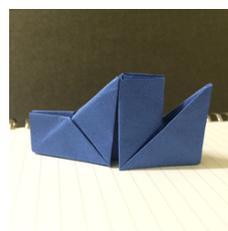
日本のほかにも、いくつかの国に伝統的な折り紙が存在する。中国の伝統的な折り紙作品は紙飛行機（図 2.3[c]）、さるの山登り、かえるパタパタなどが挙げられる [10]。ヨーロッパの伝承作品として代表的なものに、パハリータ、風船、紙飛行機（ダーツ）などが挙げられる。



[a] 鶴



[b] 贈答品を包む折形



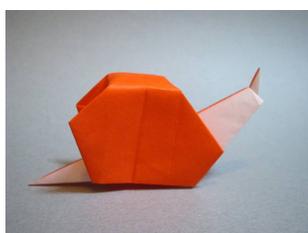
[c] 紙飛行機

図 2.3: 伝統的な折り紙

## 新しい創作折り紙

1954年、日本の折り紙作家吉澤は点線と矢印による折り紙の記述方法を考案した [11]。同年に国際折り紙研究会を創設し、世界各地で作品展、講演を行い、折り紙は世界的に広がった。図 2.4[a] に示すのは吉澤が発表した作品「かたつむり」である [12]。

1980年代以降、各国の数学者や芸術者は新しい創作折り紙モデルをたくさん作ってきた。折り紙の作品集や設計に関する本も多く出版された。Lang は折り紙の設計理論を詳しく説明し、複雑なモデルの展開図などを紹介するユニークな本を発表した [13]。図 2.4[b] に示すのは Lang が発表した作品「魚」である。また、数学的な設計理論に関係なく、創作目的だけの作品も多く発表されている。神谷の作品は著しくリアルで、多くの人を魅了した (図 2.4[c]) [14]。



[a] かたつむり



[b] 魚



[c] Ancient Dragon

図 2.4: 新しい創作折り紙

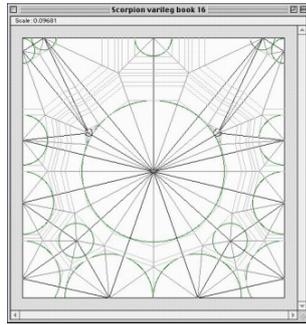
### 2.2.2 数理的なアルゴリズムを用いる折り紙デザイン

折り紙は芸術作品だけではなく、それ自身が数学のモデルとしても十分な研究対象である。近年、多くの数学者はその幾何学の性質に着目し、数学と教育の分野における折り紙を研究してきた。また、コンピュータの発展とともに、折り紙の創作は手で折ることだけではなく、数理的なアルゴリズムを用いて設計する方法も多く提案された。

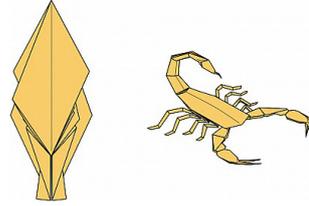
#### 平坦折り紙デザイン

ここから平坦折り紙デザインについていくつかの研究を紹介する。1996年、Lang は作りたい形を線分で表すツリー (樹形) をもとに折り線进行設計する方法、Tree Method を提案した。Tree Method により、希望する長さの枝を持つ樹形の折り紙基本形が設計でき、これを折り畳んで形を整えると折り紙作品ができる。この設計方法を実装した Tree Maker というソフトウェアが公開されている [15] [16]。図 2.5 に示すのは Tree Maker で設計した展開図と作品である。

次に、平坦折り紙デザインでよく研究されてきた平織りを紹介する。平織り (Origami Tessellation) とは、幾何学的な基本パターンを並べることで一枚の紙を充填させる折り紙のジャ



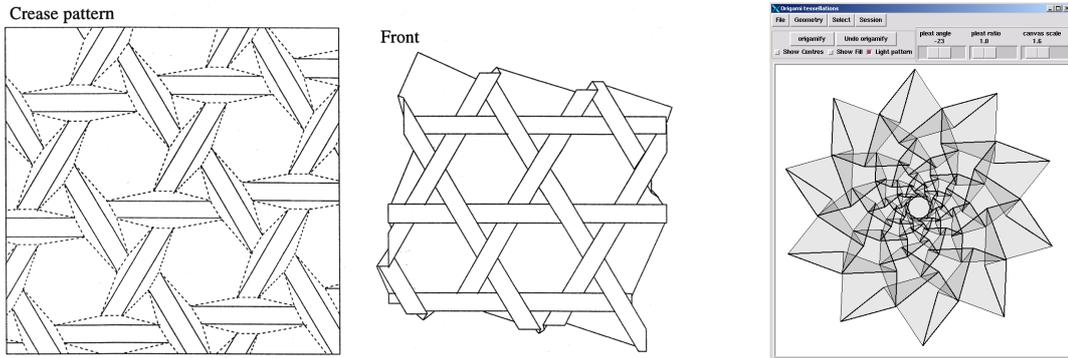
[a] Tree Maker の画面



[b] 作品

図 2.5: TreeMaker

ンルである。平坦に折り畳める平織りに関する研究の難しいところは、弾力のない紙をカットせず、たくさんのパターンを一つの平面に収めることである。図 2.6[a] は平織りの一つの例である [17]。このような平織りを設計するために Bateman が Tess というソフトウェアを開発した (図 2.6[b]) [18]。平面のタイル張りから出発し、目地の拡大と多角形の挿入、多角形の回転により平織りが設計される。回転が入ることから、ねじり折りによる平織りが得られる。さらにこのソフトウェアでは、こうしてできた展開図を折ったときどのように見えるかを示した展開図や紙の重なりが濃淡で示されたパターンも表示できる [19]。



[a] 平織りの例

[b] Tess

図 2.6: 平織りの例と Tess の画面

もう一つ紹介したいのは、Hudson が 2011 年提案した多角形構造の持つ折り紙を設計するためのアルゴリズムである [20]。今まで折り紙の構造は正方形ベースのグリッドで設計されるものが普通であった。したがって、折り紙モデルも正方形や 8 角形ベースのグリッド対称を持つものが多いことが知られている。Hudson はより多くの多角形構造の折り紙を設計するために、多角形構造のグリッド対称システムを提案し、それを用いてねじり折りの折り紙モデルを設計した。図 2.7[a] は 5 角形グリッドの繰り返しの例である。図 2.7[b][c] に示すのは Hudson が提案した Hurricane folding algorithm を使って生成された 10 角形ベースのねじり

折りの展開図とその完成図である。

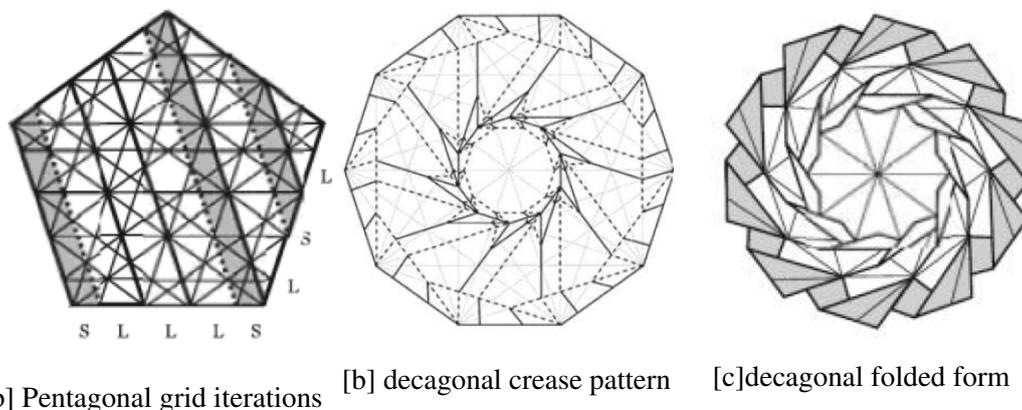


図 2.7: Polygon Symmetry Systems

### 立体折り紙デザイン

立体折り紙の設計は平坦折りの必要条件の制限がないため、形がより自由であるが、その設計理論は伝統折り紙と密接な関係がある。1枚の紙から任意な形を作ることを目的として、箱は任意の多面体をメッシュ化して展開図データを作成するツール「Origamizer」を開発した [21]。

基本パターンの組み合わせを利用して新しい形状を設計するという方法もある。Demaineらが提案したアルゴリズムを利用し、1枚の4角形の紙から、任意の垂直構造を持つ迷路やアルファベット文字を表す折り紙が設計できる。この方法を実行するため Demaineらは Maze Folderを開発した [22]。図 2.8[b] に示すのは Maze Folder を用いて設計した迷路の例である [23]。

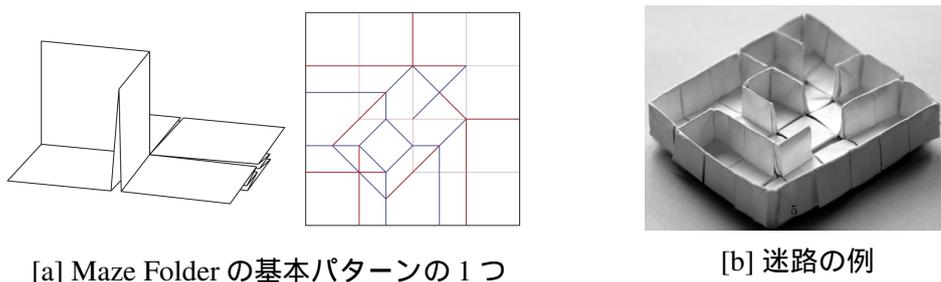


図 2.8: 立体折り紙設計

その他、軸対称な立体形状折り紙の設計方法 [24][25] や、曲線や曲面を持つ折り紙モデルの設計方法などに関する研究 [26][27] が挙げられる。

## 2.3 計算折り紙

計算折り紙、またはコンピューショナル折り紙 (computational origami) とは、折り紙に関する問題を解くための能率的なアルゴリズムを研究するコンピュータサイエンスの最近の分野である [8]。安価な高速計算機の出現で、手で折るよりずっと複雑な折り紙を視覚化、そして仮想的に折ることが可能となった。本節では、折り紙最終形状の推定と折り紙作品製作過程の支援、2つの方面から計算折り紙に関する研究を紹介する。

### 2.3.1 折り紙形状推定

折り紙シミュレーションは折り紙の表現とモデリングための非常に重要な手段である。シミュレーションを通して、折り紙の構造をよりよく理解することができる。折り畳み後の最終形状のシミュレートを目的とするツールがたくさん開発された。ここで、それぞれ平坦折り紙と立体折り紙を対象とする対表的なソフトウェアを2つ紹介する。

#### ORIPA

ORIPA (ORIPA: ORIGami PAttern editor) は三谷が折紙の基本データである展開図を計算機に効率的に入力するために開発した展開図専用エディタである。このソフトウェアを利用し、展開図に見られる特徴的な折り線構造を容易に入力できる。実際に折り紙制作の基本折り方を参考されたため、従来のドロソフトより作図時間を大幅に短縮した。さらに、折り線と紙の輪郭線によって分割された閉領域 (「多角形面素」と呼ぶ) を取得し、折り畳み後多角形面素の重なり順がどのようになるかを計算することで、折り畳み後の形状を推定することができる [28]。また、山谷割当てつきの展開図をデジタルデータファイルとして保存することができる。このソフトウェアは2005年から一般公開された後、多くの折り紙研究者に利用され、様々な新機能が追加された。図 2.9[a] は ORIPA の入力画面と形状推定画面を表示する。

#### Rigid Origami Simulator

剛体折り紙 (Rigid Origami) とは、稜線を回転ヒンジとし、各稜線に囲まれた領域を剛体面として接続して折り紙を構築したものである。このようなモデルにおいて形状が無理なく連続変形できるかどうかがよく研究されている。この連続変形可能な性質は、「剛体折り可能性 (Rigid Foldability)」と呼ばれている [29]。舘は、一般性がありロバストな手法として回転角もでるを用いたシミュレーションシステムが提案した [30]。剛体折り紙の動きをシミュレートし、CG アニメーションを生成するプログラムが開発され、「Rigid Origami Simulator」として公開された。図 2.9[b] は Rigid Origami Simulator の画面を示す。

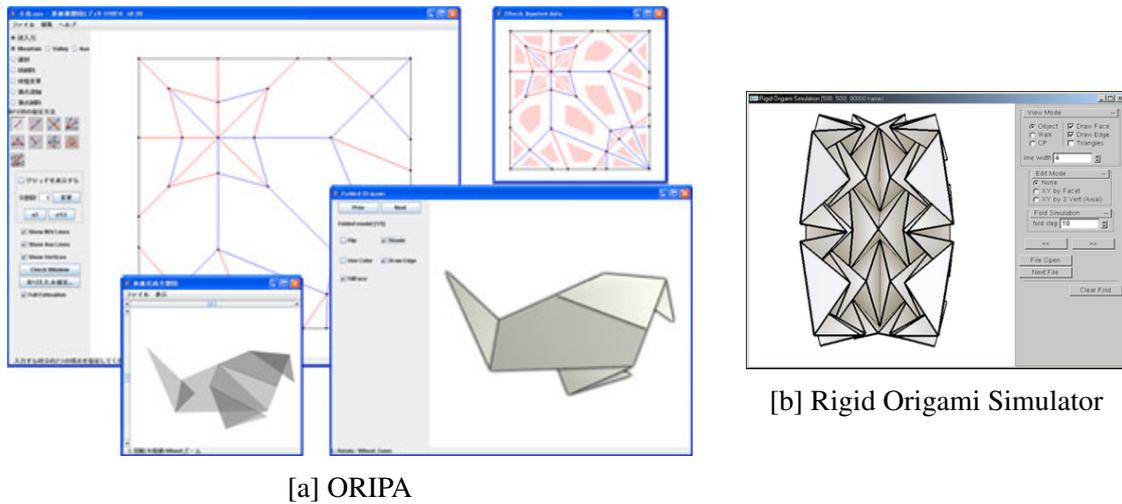


図 2.9: ORIPA と Rigid Origami Simulator の画面

### 2.3.2 折り紙製作支援

折り畳み後の結果を推定するツール以外では、折り紙製作過程を表示するための支援システムも多く開発された。

折り紙の作品集などでは、折り紙の製作過程を再現されるために、各折り手順を図で示している。この図は折り図と呼ばれている。折り図の手描きには専門的な道具や技能が必要で、特に複雑なモデルを描くとき非常に退屈な作業となる。この問題を解決するために、John Szinger が折り図の作成を支援するソフトウェア Foldinator を開発した。対話的なユーザーインターフェースで折り紙を折っていき、指示記号や注釈を編集できる。展開図は1つの図で作品の構造を示すため、作品の作家にとっては図の作成が容易である。しかし、折り紙を折る経験の少ない人にとっては展開図から作品を再現することは難しく、手順を示した折り図が望まれる。展開図から折り図が生成できるソフトウェアを Akitaya らが開発した [31]。

その他、新しい折り紙作品を発見するために、鶴田らが幼児向け折り紙作品の創作支援システムを開発したユーザが作りたい形を入力し、これと似ている4回以下の折り操作でできる単純な折り紙が列挙され、気に入った形を選べると折り方も提示することができる。

## 2.4 本研究に関する既存手法

本章に述べたように、数理的なアルゴリズムを用いる折り紙の設計方法は多く提案された。しかし、折り紙モデルのパターンが非常に多く、折り紙創作も常に発展しているため、研究に価値のある課題はまだたくさんある。そのなかに、平坦折り紙の設計に関する研究はつねに難航している。平坦折り紙可能性に制限が多いため、設計はととても難しく、効率的かつ有効な方法が望ましい。規則的な形を設計する方法の中で、Hudson が 2011 年提案したアルゴリズムでは多角形構造の持つ折り紙を設計する方法を論議した [20]。しかし、グリッド対称

システムを構築するのはとても難しく、実際に成功に作られたモデルも数少なかった。本研究は、作るのが比較的簡単である4回回転対称性を持つ折り紙の展開図をもとに、形をN回まで一般化する方法を探る。

## 第3章 4回回転対称性を持つ折り紙

本章では、対称の定義と対称の種類について概説し、対称性をもつ折り紙について紹介する。さらに、本研究の研究対象である4回回転対称性を持つ折り紙について調査し、その調査結果を述べる。

### 3.1 対称の種類

対称性は、数学や自然科学において重要な性質の一つである。自然界に現れているさまざまな形態を抽象化するといろいろな図形が得られる。雪の結晶や、植物の葉や、動物など、規則的な形態をしているものが多いため、対称性はよく研究されているものの性質の一つであり、物理学、建築、芸術など様々な領域に利用されている。本節では、対称の定義を説明し、幾何学的対称の種類、主に2次元ユークリッド空間における対称性を紹介する。

#### 対称

ユークリッド空間において、物体の基本変換が4種類ある：鏡映、回転、並進とそれらの合成。ある変換を通して新たな図形を生成したあと、もとの形と一致する時、この図形は対称性を持つと呼ばれている [32]。

#### 鏡映対称性

鏡映変換あるいは鏡映 (reflection) とは、ある固定点のところに垂直に両面の鏡を立てたとするならば、写像  $a$  とその鏡像が重なっていることである。2次元ユークリッド空間での鏡映変換は、固定点集合は直線であり、鏡映の軸という。この場合、与えられた直線を軸とする鏡映が定まる。同様に、三次元ユークリッド空間では、与えられた平面による鏡映が定まる。

鏡映によって変わらない図形を鏡映対称、あるいは鏡映対称性を持つと呼ばれている。特に2次元ユークリッド空間での鏡映対称は線対称と呼ばれている。ある図形を直線  $l$  に沿って折り重ねたとき、その左側の部分と右側の部分がぴったり重なるならば、この図形は直線  $l$  に関して左右対称、あるいは線対称ということである。その直線  $l$  は対称軸という。例として2等辺三角形、菱形、楕円が挙げられる (図 3.1)。また、自然界の左右対称の物体は多く見られている。例えば、植物の葉、蝶などが例として挙げられる。

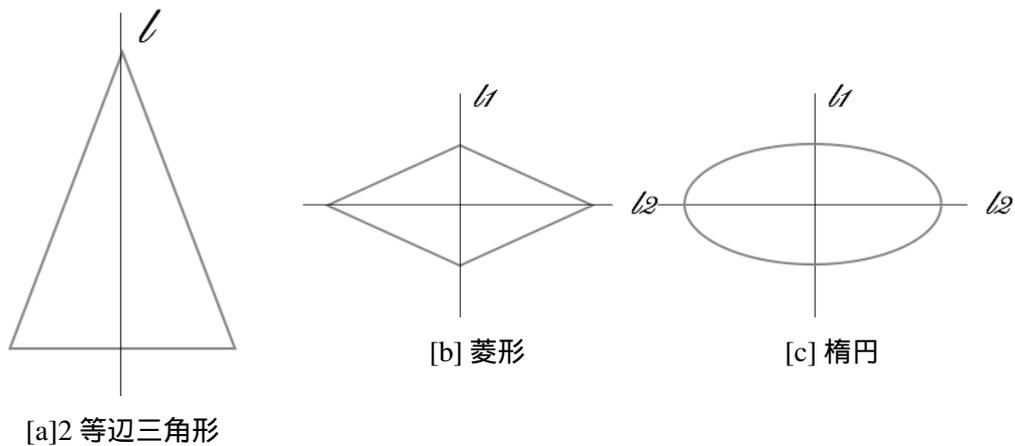


図 3.1: 線対称性を持つ図形

### 回転対称性

2次元空間では、ある点のまわりに図形を回転させるという操作が考えられる。N 回回転対称 (N は 2 以上の整数) とは、ある中心 (または軸) の周りを  $360/N$  度回転させると、自らと重なるという性質である。例えば、正三角形は  $120 (=360/3)$  度回転させると最初の図形と同じになるため、3 回回転対称性を持つ図形と呼ぶ (図 3.2)。

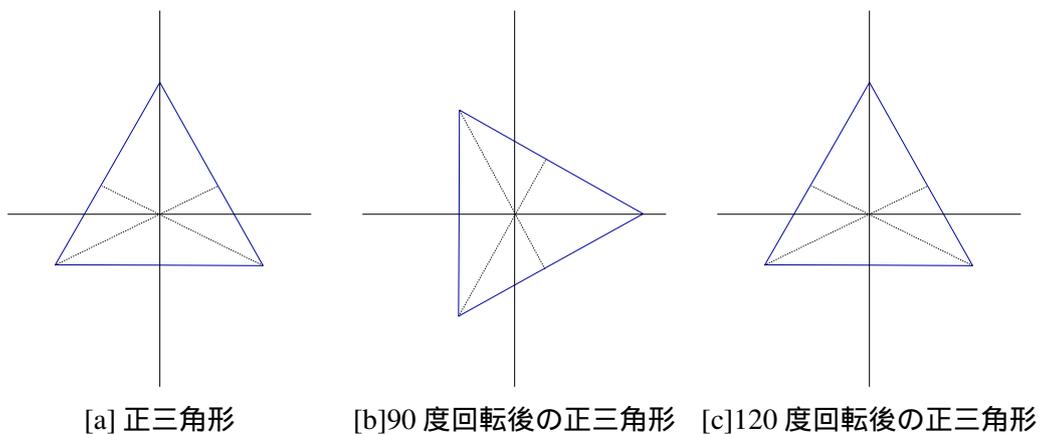
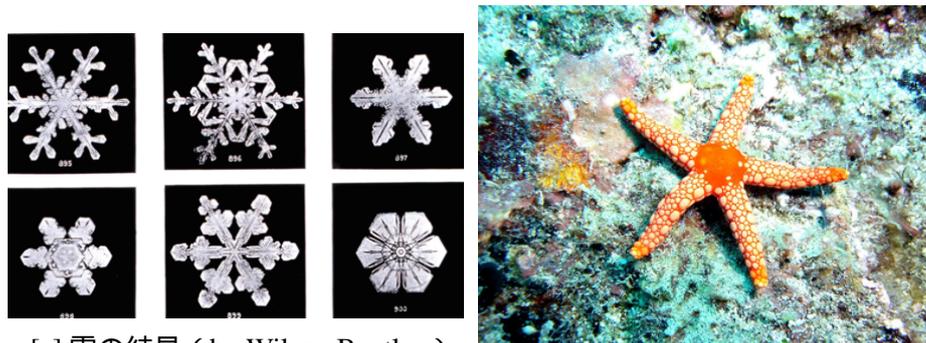


図 3.2: 正三角形の回転対称性

同様の考察により、正 4 角形、正 5 角形など正多角形は全部回転対称性を持つ図形である。その他に、円は N 回回転対称、平行四辺形は 2 回回転対称である。3次元空間では、回転の中心は軸に変わる。例えば、球は任意の軸についての N 回対称、正多面体は頂点を通る軸についての N 回対称である。自然界に回転対称性を持つものもたくさんある。例えば雪の結晶、Sea Star などが挙げられる (図 3.3)。



[a] 雪の結晶 (by Wilson Bentley)

[b] Sea Star (by Alain Feulvarch)

図 3.3: 自然界の回転対称性を持つ物体

### 並進対称性

図形をあるベクトルによって平行移動させる動作は、並進と呼ぶ。並進対称性をもつ図形とは、あるベクトルによる並進（平行移動）に関して不変な図形あるいは対称な図形であること。図 3.4[33] に示されたように、平織りや壁紙などの模様によく並進対称図形が取り入れられている。

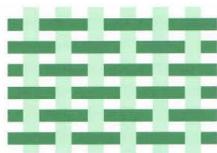


図 3.4: 並進対称性模様

## 3.2 対称性を持つ折り紙

本節では、対称性を持つ折り紙作品を紹介する。ここまで紹介した 3 種類の対称性を持つ折り紙は表 3.1 に表示される。

## 3.3 4 回回転対称折り紙作品についての調査

本研究の対象となる 4 回回転対称折り紙作品について、調査を行った。折り紙の作品集を対象とし、4 回回転対称折り紙作品の数とそれらの展開図を記録した。その結果、計 8 冊の折り紙の作品集に載られた 500 以上の作品の中に、約 70 個存在することが分かった。また、その中に、回転対称性を持つ平坦折り紙作品は 40 個存在することが分かった。表 3.2 に示すのは今回の調査結果である。

一部の折り紙作品を例として挙げる（表 3.3 と 3.4）。

表 3.1: 対称性を持つ折り紙

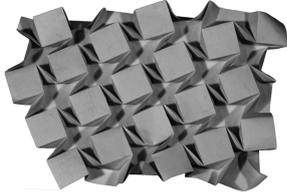
対称の種類	平坦折り紙	立体折り紙
鏡映対称	 [34]	 [35]
回転対称		 [36]
並進対称	 by Alex Batema	 [37]

表 3.2: 4 回回転対称折り紙作品についての調査結果

タイトル	作者	平坦折り紙の数	立体折り紙の数
英語で折り紙 [38]	山口真	3	9
おり鶴百彩 [39]	小林一夫	0	2
おりがみ新発見 1[40]	笠原邦彦	0	0
おりがみ新発見 2[41]	笠原邦彦	11	1
おりがみ新発見 3[42]	笠原邦彦	24	7
おりがみしようよ [43]	新宮文明	7	3
本格折り紙 [44]	前川淳	0	2
壁面おり紙 [45]	山口真	4	0

表 3.3: 4 回回転対称平坦折り紙作品例

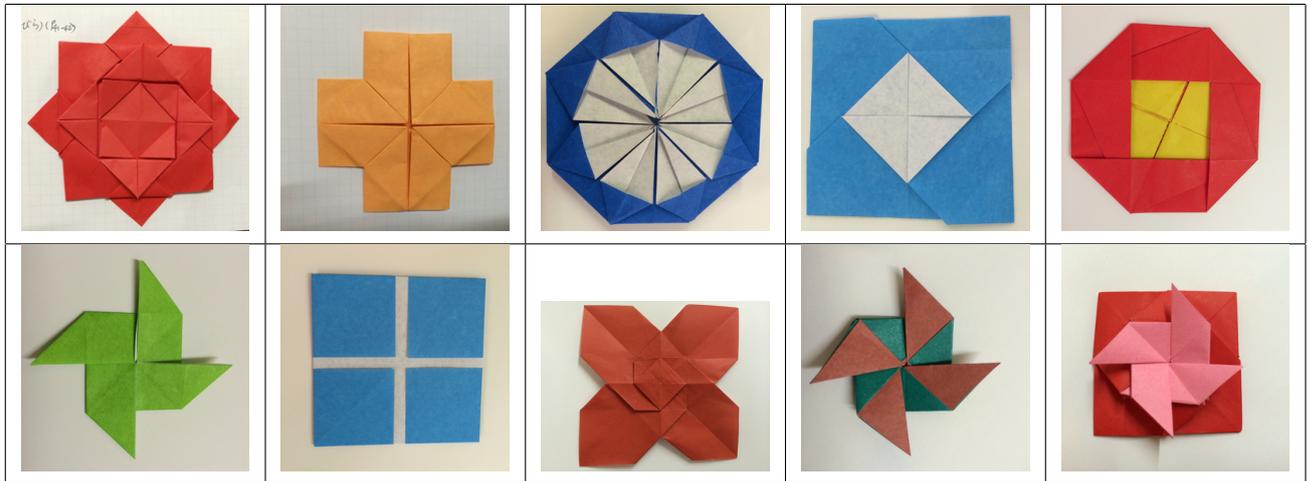
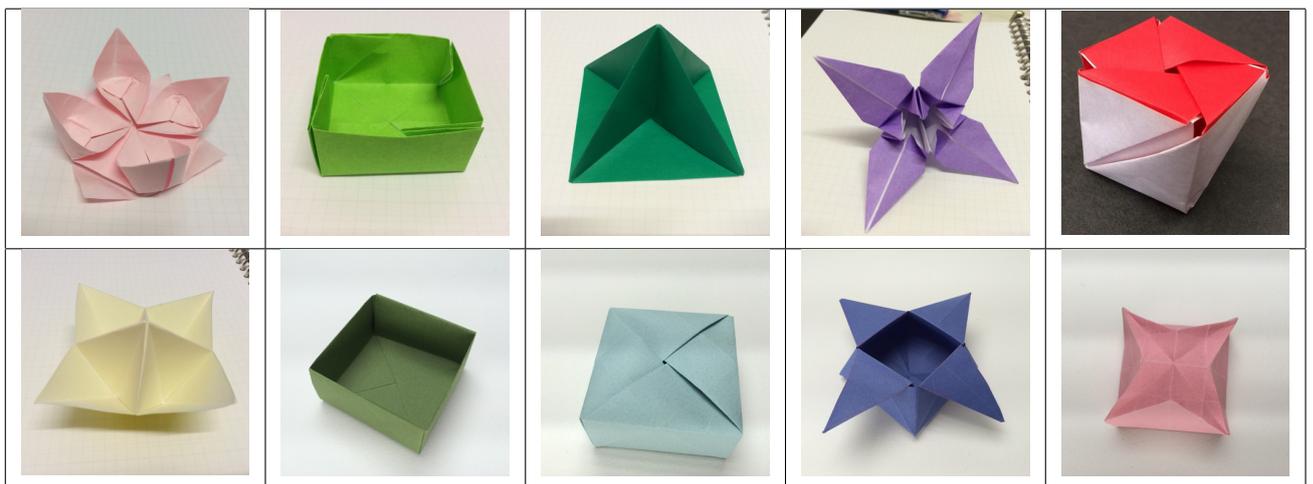


表 3.4: 4 回回転対称立体折り紙作品例



## 第4章 N回回転対称への変換

この章では、4回回転対称平坦折り紙の展開図を利用し、N回回転対称性を持つ折り紙の展開図を生成する方法を説明する。

### 4.1 展開図の分割

4回回転対称の折り紙の展開図は4つの同一なユニットで構成されている。つまり、正方形の中心を回転の中心とし、1つのユニットを90(360/4)度刻みで回転させると、もと4回回転対称の展開図になる。したがって、展開図をN回回転対称に変換させるために、元の展開図の1/4だけを取り出し、1/Nのユニットを作る必要がある。本節では、展開図を分割する方法を述べる。

4分の1のユニットを取り出す、展開図にあるどこか1つ基準となる折り線を決める。折り線の位置と4角形のある辺の垂線との位置関係により、下記3つのTypeが分けられる(図4.1)。実際に展開図を分割するとき、なるべくN回回転対称にしたあとでも平坦折り条件に近い展開図にするため、内部頂点が分割された1つのユニットの境界上になるように、3つのTypeから1つを選ぶ。

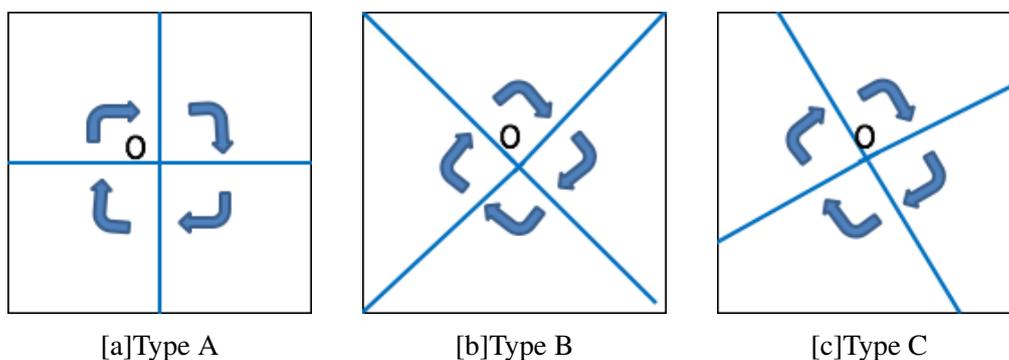


図 4.1: 折り線と垂線との位置関係により分けられた3つのType

節 3.3 で調査した既存4回回転対称平坦折り紙の結果から見ると、図4.1[a][b]に示されたType AとType Bに当てはまるケースが多い。したがって、本研究は下記二つの分割方法を提案する。一つ目は、正方形の対角線に沿って分割することである。この場合、分割して得たユニットは必ず内角が90度の三角形になっている( Type A )。二つ目は、正方形を4つの同じ大きさの正方形を分割することである( Type B )。

## 4.2 1/N ユニットの作成

展開図を 1/4 ユニットに分割された後、重心座標系を利用し、1/4 ユニットの 1/N ユニットに変形させる。本節では、重心座標系を紹介し、それを用いる展開図の 1/N ユニットの作成方法を説明する。

### 4.2.1 重心座標系

三角形の内部にある点 P の重心座標とは、三角形の頂点と P で連結された線分による分割された 3 つの三角形の面積の比で表される座標である。(図 4.2) [46] 三角形内の任意の点を、別の三角形内にマッピングさせたい場合、重心座標系はよく使われている。

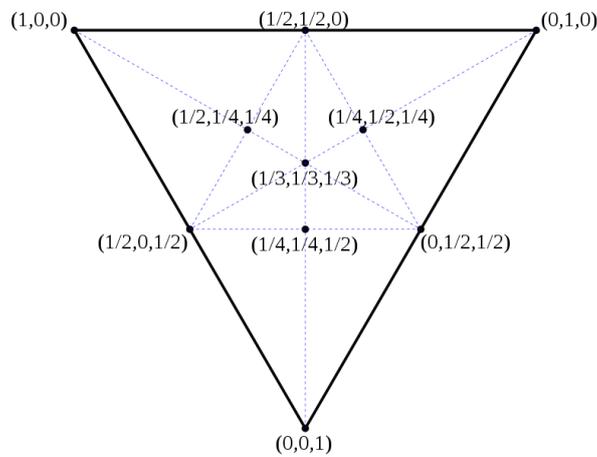


図 4.2: 重心座標系

3 つの三角形と元の三角形 ABC との面積の比はそれぞれ  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  と表示される時、点 P の座標は下記の式で表される。

$$P(\alpha, \beta, \gamma) \quad (4.1)$$

ただし、 $\alpha + \beta + \gamma = 1$  である。また、点 P は三角形内部の点であるため、 $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 1$ 。

$$\alpha = S \triangle BPC / S \triangle ABC \quad (4.2)$$

$$\beta = S \triangle APC / S \triangle ABC \quad (4.3)$$

$$\gamma = S \triangle APB / S \triangle ABC \quad (4.4)$$

より  $\alpha, \beta, \gamma$  が求められる。

任意三角形の 3 つの頂点の座標  $(a_x, a_y), (b_x, b_y), (c_x, c_y)$  は知られているとき、面積は下記の式により計算できる。

$$S = \frac{1}{2}|a_y(b_x - c_x) + b_y(c_x - a_x) + c_y(a_x - b_x)| \quad (4.5)$$

点 P の重心座標は下記の式により、直交座標系の点 P の座標  $(P_x, P_y)$  が求められる。

$$P_x = \alpha A_x + \beta B_x + \gamma C_x \quad (4.6)$$

$$P_y = \alpha A_y + \beta B_y + \gamma C_y \quad (4.7)$$

$$x_{P'} = \alpha x_{A'} + \beta x_{B'} + \gamma x_{C'}$$

$$y_{P'} = \alpha y_{A'} + \beta y_{B'} + \gamma y_{C'}$$

ここで、 $(A_x, A_y), (B_x, B_y), (C_x, C_y)$  は三角形 ABC の 3 つの頂点の座標である。

#### 4.2.2 ユニットの变形

これから重心座標系を利用し、变形後のユニットの内部頂点の座標を計算する方法を紹介する。

##### TypeA

分割方法 Type A で分割された 1/4 ユニットは必ず内角が 90 度の三角形になっているため、重心座標系が利用できる。1/N ユニットの三角形の頂点座標を算出するには、回転移動のアフィン変換を利用する。ここで、变形前のユニットの頂点座標を  $P(x, y)$  とし、变形後のユニットの頂点座標は  $P'(x', y')$  とする。

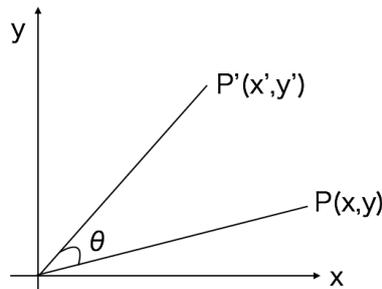


図 4.3: アフィン変換のイメージ

図 4.3 に示すように、点 P を角度  $\theta$  回転させる場合、アフィン変換の式は下記の式になる。

$$[x' \ y' \ 1] = [x \ y \ 1] \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

この行列のかけ算を計算すると、次のようになる。

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta \quad (4.9)$$

$$y' = x \sin \theta + y \cos \theta \quad (4.10)$$

このように、変形後のユニットの頂点座標を計算した後、予め得られた 1/4 ユニットの中の点 P の重心座標を利用し、新しいユニットの内部頂点座標を算出することができる。図 4.4 に示すのは分割方法 Type A で分割された 1/4 ユニットの 1/5 ユニットに変形する例である。

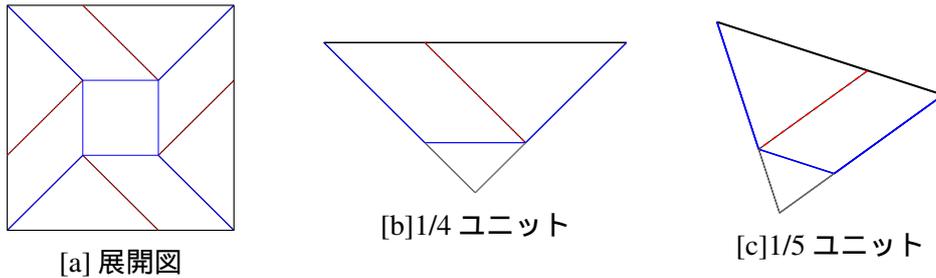


図 4.4: 分割方法 Type A で分割された 1/4 ユニットの 1/5 ユニットに変形する例

### TypeB

Type B の分割方法で分割された 1/4 ユニットは正方形であるため、直接重心座標系を利用することができない。この場合、正方形の 1 つの内角を三角形の 90 度の内角に当てはめて、三角形の一部とする（図 4.5）。

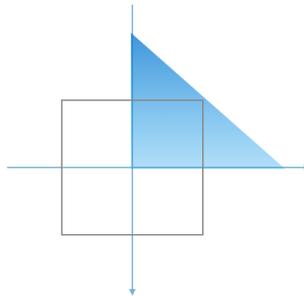


図 4.5: Type B の 1/4 ユニットの三角形の一部とするイメージ

こうすると、正方形のユニットが変形された座標が計算することができる。図 4.6 に示すのは分割方法 Type B で分割された 1/4 ユニットの 1/5 ユニットに変形する例である。

## 4.3 N 回回転対称展開図の作成

本節では、変形されたユニットを利用した、N 回回転対称展開図の作成方法を説明する。

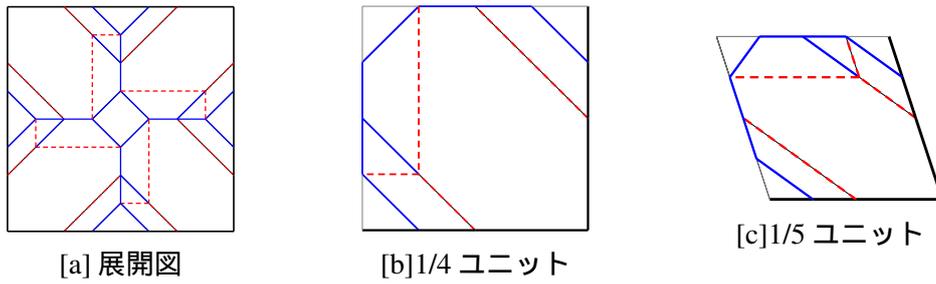


図 4.6: 分割方法 Type B で分割された 1/4 ユニットの 1/5 ユニットに変形する例

回転対称の定義により、原点  $O$  を中心として変形された  $1/N$  ユニットの  $360/N$  度を刻みで回転させ、 $N$  回回転対称展開図が得られる。図 4.7 と図 4.8 はそれぞれ、Type A と Type B のユニットから 5 回回転対称展開図の作成例を示す。

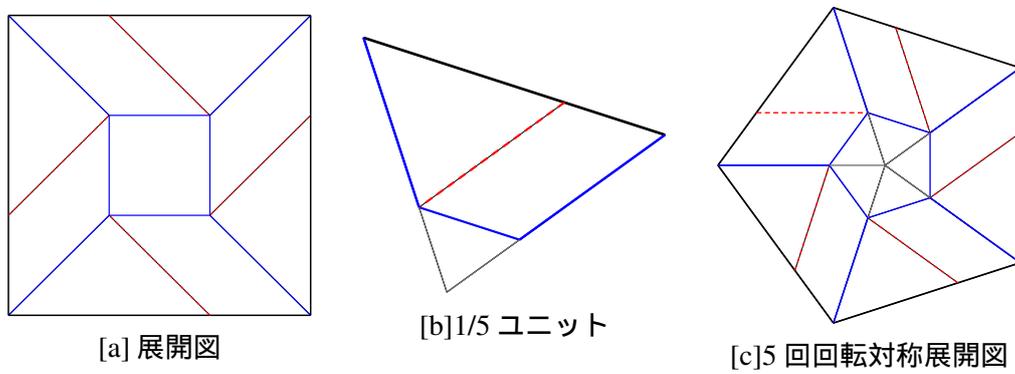
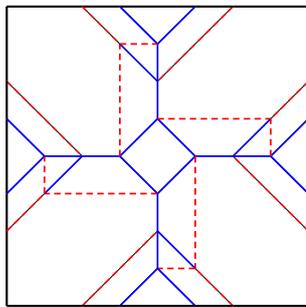
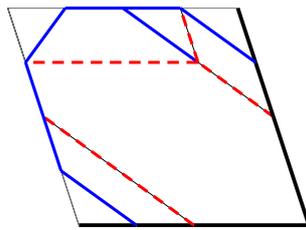


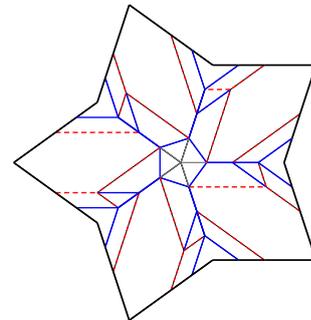
図 4.7: Type A のユニットから 5 回回転対称展開図の作成例



[a] 展開図



[b] 1/5 ユニット



[c] 5 回回転対称展開図

図 4.8: Type B のユニットから 5 回回転対称展開図の作成例

## 第5章 平坦折り可能性のための数値的最適化

実際に回転した後の展開図は、平坦折り可能かどうかを検証する必要がある。すべての計算結果を手作業で検証することは時間的にあまりにも無理がある。検証の手間を軽減するために、数値最適化アルゴリズムを用い、回転後の展開図の内部頂点と折り線の位置を調整する [47]。

アルゴリズムの概要：

1. 平坦折り可能の必要条件に満たされるかどうか判断する
2. 満たさない場合、ラグランジェの未定乗数法で最適解を計算する
3. 0.01 度以下になるまで繰り返し処理を行う
4. 1 に戻る

本章では、平坦折り可能性の必要条件を紹介し、その必要条件をもとに提案された数値的最適化アルゴリズムを詳しく説明する。

### 5.1 平坦折り可能性についての判断

節 2.1.1 で折り紙の平坦折り可能性に関する研究を紹介した。本節では、平坦折り判断に関する 2 つの必要条件を詳しく説明する。

1 つ目の条件は、山折り線と谷折り線の数に関する前川定理である。

前川定理 単頂点折り紙の展開図が平坦折り可能である必要条件是、頂点  $v$  に集まる山折り線の数  $M$  と谷折り線の数  $V$  の差は 2 である。

$$M - V = \pm 2 \quad (5.1)$$

次に、角度列に関する条件を述べる川崎定理を参考する。

川崎定理 単頂点折り紙の展開図が平坦折り可能である必要十分条件は、頂点  $v$  の周りの折り線がなす角度を 1 つおきに加えると  $180^\circ$  になる。

$$\alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2n-1} = \alpha_2 + \alpha_4 + \dots + \alpha_{2n} = 180^\circ \quad (5.2)$$

この二つの平坦折り必要条件を基に、生成された  $N$  回回転対称性を持つ展開図の平坦折り可能性を判断する。

## 5.2 頂点位置の調整

前の章で紹介した方法で得た  $N$  回回転対称の展開図の各頂点が、前節で紹介した二つの定理を満たさない場合、ラグランジェの未定乗数法を利用し、頂点位置を調整する。本節では、頂点位置の調整方法について詳しく説明する。

ラグランジェの未定乗数法 (Lagrange Undertermined Multipliers) とは、変数に付加条件のある関数の極値を求めるときよく使われている方法だと知られている。前節で紹介した二つの定理に満たさない場合、調整された後の頂点位置を計算する。

折り線の山谷割当て情報は  $N$  回回転対称展開図から得られる。したがって、拘束条件は折り線と角度に関連する川崎定理であり、下記の式が定義された。

$$\sum \theta_{k,2j} = \sum \theta_{k,2j+1} = \pi \quad (5.3)$$

ここでは、 $k$  は内部頂点の番号である。 $\theta_{k,2j}$  は頂点周りの偶数番目の内角の和であり、 $\theta_{k,2j+1}$  は頂点周りの奇数番目の内角の和である。

内部頂点の位置をできるだけ動かない方が良いため、下記の評価関数を定義する。また、今回は内部頂点の重み  $\omega$  を全て 1 とし、他の頂点の重みを無限大にする。

$$E = \sum \omega_i |V_i - V_i'|^2 \quad (5.4)$$

移動された  $i$  番目の頂点の座標を  $V_i$ 、移動後の頂点座標を  $V_i'$ 、またその頂点の重みを  $\omega_i$  と定義する。重みについて、今回は内部頂点の重みを全部 1 で、他の頂点の重みを無限大にする。

上記の拘束条件下の最適化問題をラグランジェの未定乗数法で解く。

$$F(x) = E + \lambda C \quad (5.5)$$

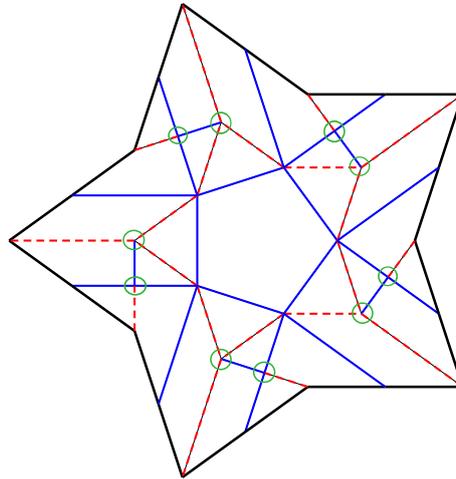
ただし、 $C = \pi - \sum \theta_{k,2j} = 0$  とする。ここでの最適解は  $\|\nabla F(x)\| = 0$  である。

## 5.3 近似値の求め方

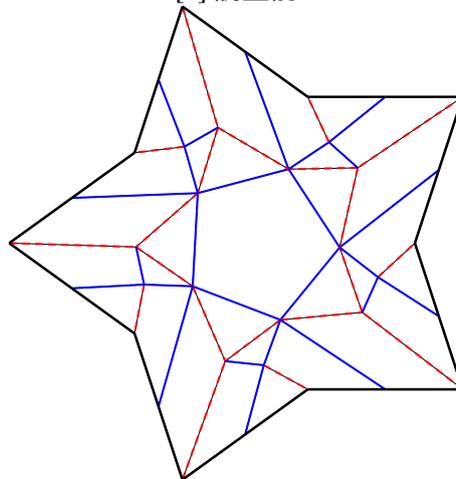
誤差をなるべく小さくするため、ニュートン法で最適解の近似値を算出する。ニュートン法 (Newton's method) は、高次の方程式や非線形の方程式の近似解を求めるとき、よく使われている方法である。関数上の一点とその接線を用いて根に近づいていく方法である。具体的な繰り返しは下記のアルゴリズムで表わされる。

```
While  $\|\nabla F(x)\| > \varepsilon$   
  Solve  $\nabla^2 F(x)\delta = -\nabla F(x)$   
   $x \leftarrow x + \delta$   
End
```

ここで  $\varepsilon$  は任意の閾値とする。実装では角度の誤差が 0.01 度以下になるまで繰り返し処理を行っている。図 5.1 は、風車の一種の 5 回回転展開図を調整する前と調整した後を表す。図に示したように、全ての内部頂点は調整された。特に位置の変更が大きいのは、5.1[a] の中で囲まれている頂点である。



[a] 調整前



[b] 調整後

図 5.1: 折り線の調整

## 第6章 実装と結果

この章では、提案手法を実装したシステムを紹介し、実際に生成された  $N$  回回転対称折り紙の結果例をあげる。また、その結果を基に提案手法の制限を議論する。

### 6.1 システム

今回の提案手法は ORIPA をもとに実装した。ORIPA は、三谷が公開した折り紙展開図の情報を編集するためのソフトウェアである (2.3.1 節参照)。今回は展開図の分割と回転などの操作を実装し、最適化アルゴリズムも実装した。図 6.1 にはインターフェースを示す。左側は入力ボタンで、右側は展開図の表示と編集領域である。

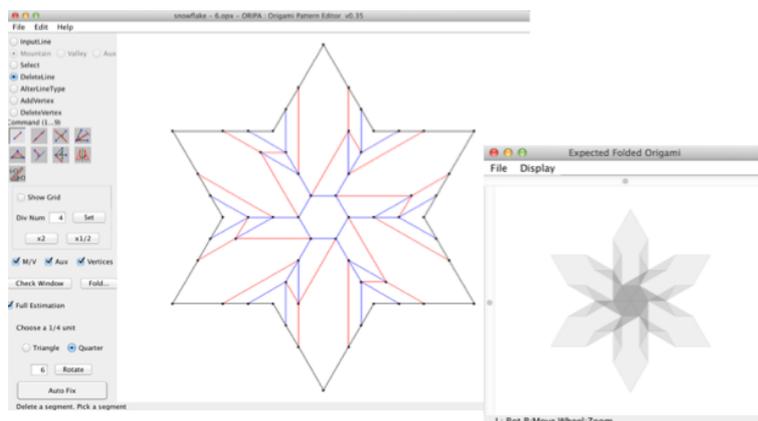


図 6.1: インターフェース

### 6.2 結果例

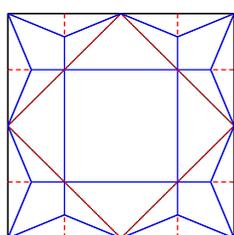
今回の実験対象は、予め調査した結果 (節 3.3 に参照) の中に分割パターン Type A と Type B に当てはまる 4 回回転対称平坦折り紙計 18 種類である。生成した展開図をプリントし、折り可能性を検証した結果、内部頂点が分割された 1 つのユニットの境界上になる場合、提案手法が適応できることが確かめられた。

表 6.1 に示すように、18 種類の平坦折り紙作品の中に、8 回回転対称までの一般解を成功させた作品の数は 12 である。3 回や 6 回まで成功した作品の数は 2 である。その他 4 種類は全部 3 回から失敗した。失敗した原因は、大域的に折れないことである。

表 6.1: 結果統計

Type	8 回まで成功の数	途中で失敗の数
Type A	5	1
Type B	7	1

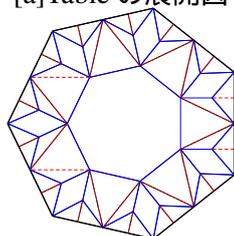
二つのパターンの成功例をそれぞれ挙げる。図 6.2 は、Type A の「Table」という作品とそれを 7 回回転させた後の結果を表す。図 6.3 は、Type B の「Snowflake」という作品とそれを 6 回回転させた後の結果を表す。この 2 つの例はいずれも頂点を調整する必要がなかった。



[a]Table の展開図



[b]Table の完成図



[c]7 回の Table の展開図



[d]7 回の Table の完成図

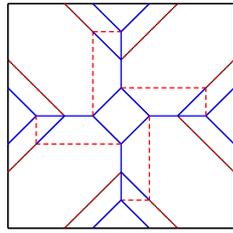
図 6.2: Type A の例 : Table と 7 回回転させた結果

図 6.4 は、Seashell Star の一種の 7 回回転展開図を調整する前と調整した後を表す。

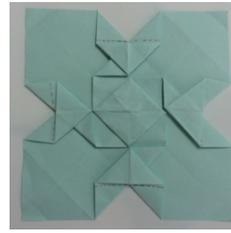
また、図 6.5 に示すのは失敗例である。それぞれの頂点は局所的平坦折り条件に満たすが、面と面との衝突が発生することにより、大域的平坦折り不可能である。

### 6.3 考察

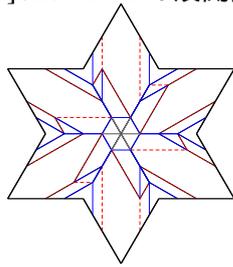
実験では 3 回から 8 回までを対象として、提案手法を適用した。N>8 については未調査であるが、大域的に折れない場合を除けば、これ以上の多角形も設計できると考えられる。ただし、角数が大きすぎると 1 つのユニットが非常に細長くなってしまい、紙で折ることが物理的に困難になることが予想される。



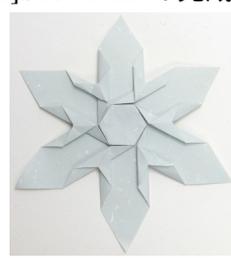
[a] Snowflake の展開図



[b] Snowflake の完成図

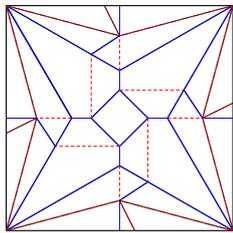


[c] 6回 Snowflake の展開図

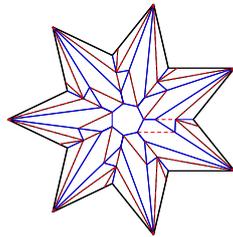


[d] 6回 Snowflake の完成図

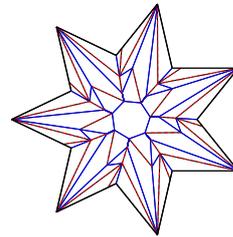
図 6.3: Type B の例 : Table と 6 回回転させた結果



[a] SeashellStar の展開図



[b] 調整前 7 回の  
SeashellStar の展開図



[c] 調整後 7 回の  
SeashellStar の展開図

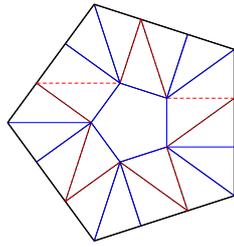


[d] SeashellStar の完成図



[e] 調整後 7 回の  
SeashellStar の完成図

図 6.4: 数値的最適化の使用前後の比較



[a] 展開図

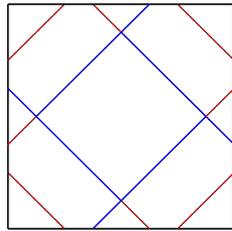


[b] 完成図

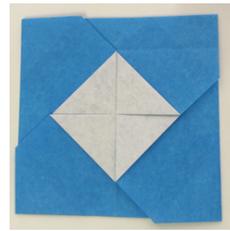
図 6.5: 「めんこ」を 5 回回転させた後の結果

また、出力された展開図は局所的な平坦条件は満たしているが、大域的に折れない場合がある。大域的な折り可能性の判断は、実際に紙を折ることで確認しているため、これの自動化が望まれる。

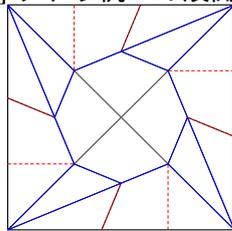
今回の提案手法に適応している折り紙の展開図は、すべて提案した分割方法で展開図の 1/4 がユニットに収まることのできるものである。ただし、タトウのような紙の端を折り曲げて重なることでできた作品は、展開図は分割方法に適応するが、作品自体は大域的に交差があるため、今回の実験では対象外とした。図 6.6 はタトウの二つの例である [38][45]。



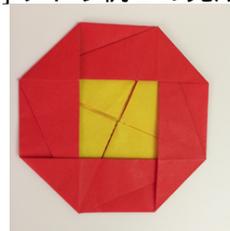
[a] タトウ例 1 の展開図



[b] タトウ例 1 の完成図



[c] タトウ例 2 の展開図



[d] タトウ例 2 の完成図

図 6.6: タトウの例

## 第7章 まとめと今後の課題

本章では、まとめと今後の課題を述べる。

### 7.1 まとめ

4回回転対称性を持つ平坦折り紙の展開図の一般化を目的として、展開図を $N$ 回回転対称に拡張する手法を提案した。提案手法を実行する前に、8冊の作品集に載せられた4回回転の折り紙作品に対する調査を行った。展開図を観察し、2パターンの展開図に対して変形方法を提案し、18種類の4回回転対称性を持つ平坦折り紙の変形結果の平坦折り可能性を検証した。その結果、一部は3回と、5~8回回転対称させた結果が明らかになった（結果は付録を参照）。他の一部は6回以上の一般化が失敗したが、失敗の原因は大域的に折れないためである。

また、今回の提案手法はすべての4回回転平坦折り紙に対応できない。提案した分割方法で展開図の $1/4$ がユニットに収まらないものと、タトウのような紙の端を折り曲げて重なることでできた作品は全部検証の対象外にした。対応できる4回回転平坦折り紙から、59の新しい作品ができた。一枚の紙で任意の $N$ 回回転平坦折り紙を作るのは困難であるが、生成された展開図を用い、簡単にできることがわかった。

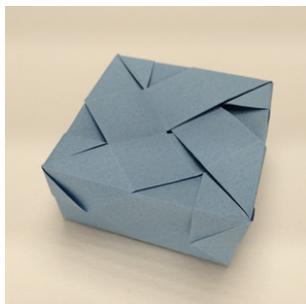
### 7.2 今後の課題

今回の提案手法は回転対称が何回まで成功できるかは判断できない。 $N$ の限界について、実際に折る時に検証しなければならない。有効な数理的検証する方法があるかどうか、今後これについて良い案を探してみたい。

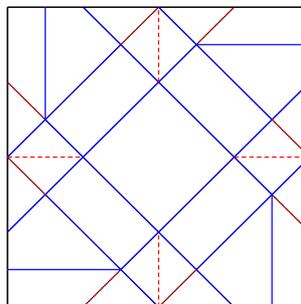
本研究の対象は平坦折り紙であるが、平坦ではない折り紙作品も今後の研究対象として検討したいと考えている。立体折り紙は局所的な平坦折り可能性の判定が有効に働かないので、実装した数値的最適化は適用できない。

今回の提案手法を用いて、4回回転対称の折り紙箱の5-7回回転対称作品を試作した。図7.1は箱の元の形と展開図と、7回回転させた後の展開図と完成図を示す。また、図7.2に示すのは2種類の4回回転対称立体折り紙花とその5-8回回転させた後の結果である。結果から見ると、 $N$ 回回転させた後の形は元の形と完全に一致しているとは限らないことが分かった。それは、局所的な平坦折り可能性を考慮する必要がなく、大域的に折ることが可能の自

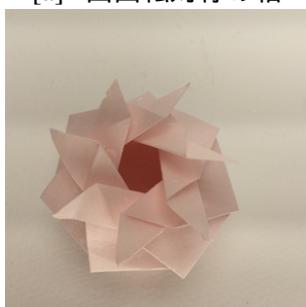
自由度はかなり高いからである。したがって、立体折り紙を対象とすると、うまくいくケースが多いだろう。



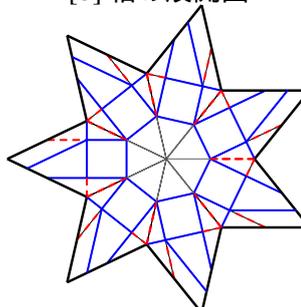
[a]4 回回転対称の箱



[b] 箱の展開図



[c]7 回回転させた後の箱



[d]7 回回転させた後の展開図

図 7.1: 箱と 7 回回転させた後の展開図とその完成図



[a]origami phlox flower



[b]traditional origami lily

図 7.2: 花の N 回回転試作

## 謝辞

本研究を進めるにあたり、本学システム情報工学研究科三谷純准教授、および福井幸男教授、金森由博助教には、丁寧なご指導をいただきました。心より感謝申し上げます。また、鶴田直也さんには丁寧なご助言をいただき、深く感謝申し上げます。

その他にも、非数値処理アルゴリズム研究室（NPAL）の皆さんに貴重な意見をいただき、誠にありがとうございました。

最後に、いつも支えてくれた家族と友人に、心より深くお礼申し上げます。

## 参考文献

- [1] Rourke Erik D. Demaine, Joseph O. *GEOMETRIC FOLDING ALGORITHMS: Linkage, Origami, Polyhedra. Cambridge.* Polyhedra. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2007.
- [2] Thomas C Hull. The combinatorics of flat folds: a survey. *arXiv preprint arXiv:1307.1065*, 2013.
- [3] Thomas Hull. On the mathematics of flat origamis. *Congressus Numerantium*, pp. 215–224, 1994.
- [4] Jacques Justin. Mathematics of origami, part 9. *British Origami*, Vol. 118, pp. 28–30, 1986.
- [5] Toshikazu Kawasaki. On the relation between mountain-creases and valley-creases of a flat origami. In *Proceedings of the 1st International Meeting of Origami Science and Technology*, pp. 229–237, 1989.
- [6] Thomas Hull. Counting mountain-valley assignments for flat folds. *Ars Combinatoria*, Vol. 67, pp. 175–188, 2003.
- [7] Marshall Bern and Barry Hayes. The complexity of flat origami. In *Proceedings of the seventh annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, pp. 175–183. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1996.
- [8] Erik D Demaine and Martin L Demaine. Recent results in computational origami. In *Origami3: Third International Meeting of Origami Science, Mathematics and Education*, pp. 3–16, 2001.
- [9] <http://ja.wikipedia.org/wiki/折形>.
- [10] 笠原邦彦. 最新・折り紙全書 伝承折り紙の展開と応用. 日本文芸社, 1988.
- [11] 吉澤章. 新らしいおりがみ芸術 第1集 (作品と折り方). 折紙芸術社, 1954.
- [12] 吉澤章. 美しい折り紙: 吉澤章創作折り紙作品集. 鎌倉書房, 1974.
- [13] Robert J Lang. *Origami Design Secrets: Mathematical Methods for an Ancient Art, Second Edition*. A K Peters/CRC Press, 2011.

- [14] 神谷哲史. 神谷哲史作品集. おりがみはうす, 2004.
- [15] Robert J Lang. Mathematical algorithms for origami design. *Symmetry: Culture and Science*, Vol. 5, No. 2, pp. 115–152, 1994.
- [16] Robert J Lang. A computational algorithm for origami design. In *Proceedings of the twelfth annual symposium on Computational geometry*, pp. 98–105. ACM, 1996.
- [17] Helena Verrill, et al. Origami tessellations. In *Bridges: Mathematical Connections in Art, Music, and Science*, pp. 55–68. Unknown, 1998.
- [18] Bateman, Alex. Paper Mosaics: Origami Tessellations. <http://www.papermosaics.co.uk/software.html>.
- [19] Alex Bateman. Computertools and algorithms for origami tessellation design. In *Origami 3: Proceedings of the 3rd International Meeting of Origami Mathematics, Science, and Education*, pp. 121–127, 2002.
- [20] Andrew Hudson. Polygon symmetry systems. In *Origami 5: Fifth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education*, p. 81. CRC Press, 2011.
- [21] E Demaine and Tomohiro Tachi. Origamizer: A practical algorithm for folding any polyhedron, 2010.
- [22] Demaine,Erik and Demaine,Martin and Ku,Jason. Maze Folder. <http://erikdemaine.org/fonts/maze/>.
- [23] Erik D Demaine, Martin L Demaine, and Jason Ku. Folding any orthogonal maze. In *Proc. fifth international meeting of origami science, mathematics, and education*, pp. 449–55, 2011.
- [24] 三谷純. 軸対称な立体形状を内包する立体折り紙の設計手法 (小特集: 折紙工学の現状と課題). シミュレーション, Vol. 29, No. 3, pp. 114–120, 2010.
- [25] Heng Yi Cheng and Kang Hao Cheong. Designing crease patterns for polyhedra by composing right frusta. *Computer-Aided Design*, Vol. 44, No. 4, pp. 331–342, 2012.
- [26] et al. Kilian, Martin. Curved folding. In *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, Vol. 27, p. 75. ACM, 2008.
- [27] Tomohiro Tachi. Composite rigid-foldable curved origami structure. Proceedings of the 1st Conference ‘ Transformables, 2013.
- [28] 三谷純. 折紙の展開図専用エディタ (oripa) の開発および展開図からの折りたたみ形状の推定. 情報処理学会論文誌, Vol. 48, No. 9, pp. 3309–3317, 2007.

- [29] 萩原 一郎 (編集) 日本応用数学会 (監修). 折紙の数理とその応用 (シリーズ応用数理 3). 共立出版, 2012.
- [30] Tomohiro Tachi. Simulation of rigid origami. *Origami*, Vol. 4, pp. 175–187, 2009.
- [31] Hugo A Akitaya, Jun Mitani, Yoshihiro Kanamori, and Yukio Fukui. Generating folding sequences from crease patterns of flat-foldable origami. In *ACM SIGGRAPH 2013 Posters*, p. 20. ACM, 2013.
- [32] Niloy J Mitra, Mark Pauly, Michael Wand, and Duygu Ceylan. Symmetry in 3d geometry: Extraction and applications. In *Computer Graphics Forum*, Vol. 32, pp. 1–23. Wiley Online Library, 2013.
- [33] 平織りと綾織り. <http://flatell.blog51.fc2.com/blog-entry-489.html>.
- [34] How to make an easy origami cat. <http://www.origami-make.com/easy-origami-cat.php>.
- [35] How to make a traditional origami bunny. <http://www.origami-make.com/traditional-origami-bunny.php>.
- [36] 三谷純. 折り紙研究ノート. <http://mitani.cs.tsukuba.ac.jp/origami/>.
- [37] Eli Davis, Erik D Demaine, Martin L Demaine, and Jennifer Ramseyer. Reconstructing david huffman’s origami tessellations. *Journal of Mechanical Design*, Vol. 135, No. 11, p. 111010, 2013.
- [38] 山口真. 英語で折り紙. Bilingual books. 講談社インターナショナル, 1996.
- [39] 小林一夫. おり鶴百彩: 伝承の鶴から日用雑貨まで. おりがみ自遊帖. エムピーシー, 2004.
- [40] 笠原邦彦. おりがみ新発見 1: 半開折り、回転折り、非対称の形. おりがみ新発見. 日貿出版社, 2005.
- [41] 笠原邦彦. おりがみ新発見 2: キューブの世界. おりがみ新発見. 日貿出版社, 2005.
- [42] 笠原邦彦. おりがみ新発見 3: 古典から最新作まで 300 年の絵巻. おりがみ新発見. 日貿出版社, 2005.
- [43] 新宮文明. おりがみしようよ!: めだまシールつき. 実用 best books. 日本文芸社, 2005.
- [44] 前川淳. 本格折り紙: 入門から上級まで. 日貿出版社, 2007.
- [45] 山口真. 壁面おり紙スペシャル BOOK: キュートなおり紙でつくる教室飾り. いかだ社, 2014.
- [46] Barycentric coordinate system. [http://en.wikipedia.org/wiki/Barycentric\\_coordinate\\_system](http://en.wikipedia.org/wiki/Barycentric_coordinate_system).

- [47] Jun Mitani. A method for designing crease patterns for flat-foldable origami with numerical optimization. *Journal for Geometry and Graphics*, Vol. 15, No. 2, pp. 195–201, 2011.

# 付録

表 7.1: Pinwheel Base の展開図の一般化結果

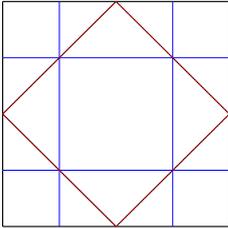
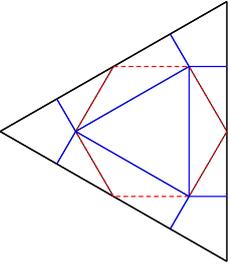
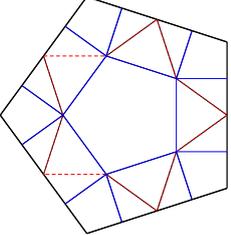
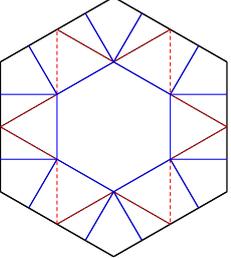
4 回折り紙とその展開図	N 回の結果とその展開図
<p data-bbox="448 674 627 707">Pinwheel Base</p>  	<p data-bbox="922 674 983 707">N=3</p>   <p data-bbox="922 992 983 1025">N=5</p>   <p data-bbox="922 1283 983 1317">N=6</p>  

表 7.2: 風車 A の展開図の一般化結果

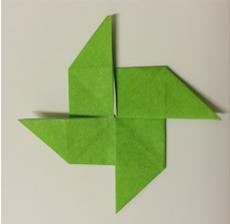
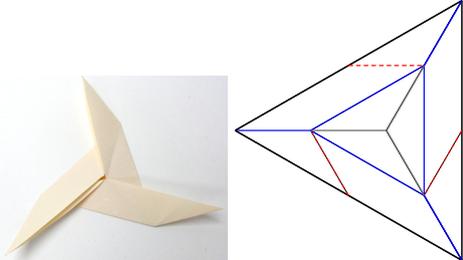
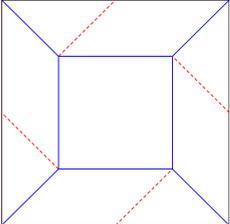
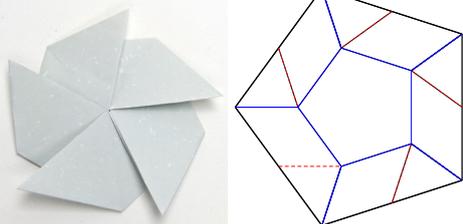
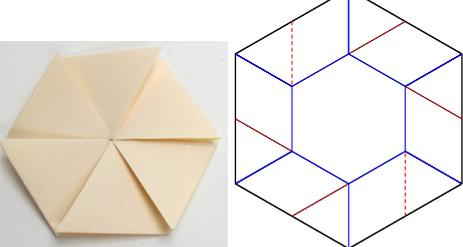
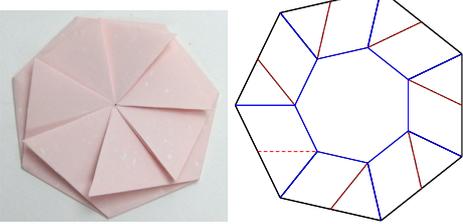
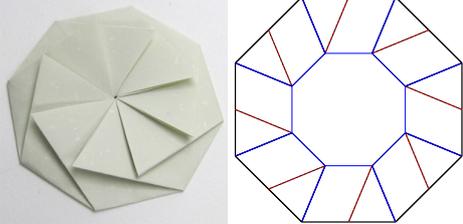
4 回折り紙とその展開図	N 回の結果とその展開図
<p style="text-align: center;">風車 A</p> 	<p style="text-align: center;">N=3</p> 
	<p style="text-align: center;">N=5</p> 
	<p style="text-align: center;">N=6</p> 
	<p style="text-align: center;">N=7</p> 
	<p style="text-align: center;">N=8</p> 

表 7.3: 風車 B の展開図の一般化結果

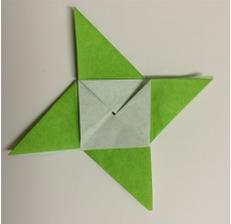
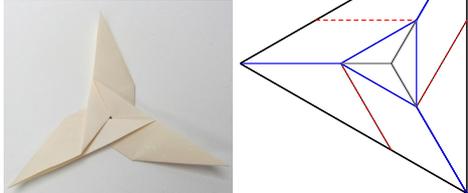
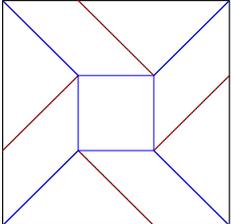
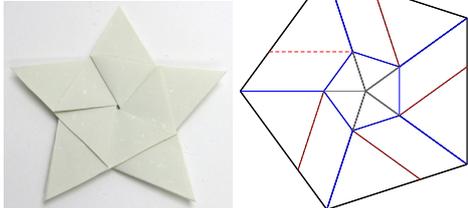
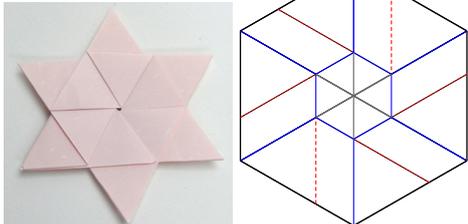
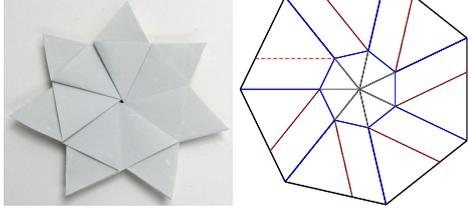
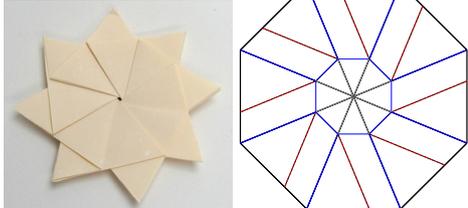
4 回折り紙とその展開図	N 回の結果とその展開図
<p style="text-align: center;">風車 B</p> 	<p style="text-align: center;">N=3</p> 
	<p style="text-align: center;">N=5</p> 
	<p style="text-align: center;">N=6</p> 
	<p style="text-align: center;">N=7</p> 
	<p style="text-align: center;">N=8</p> 

表 7.4: 風車 C の展開図の一般化結果

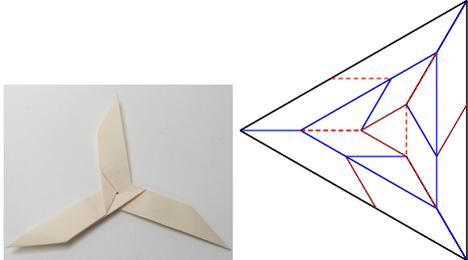
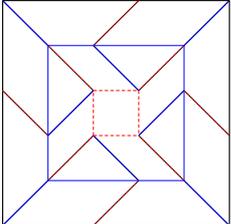
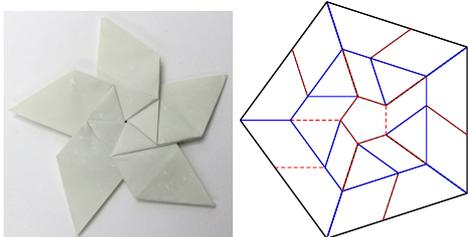
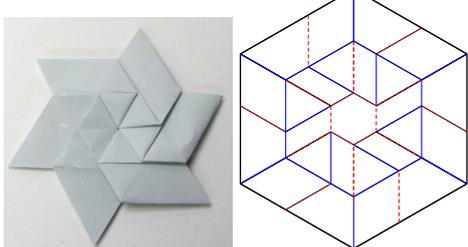
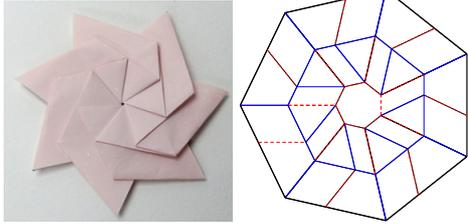
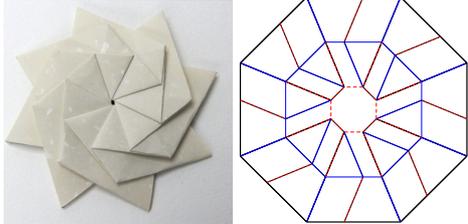
4 回折り紙とその展開図	N 回の結果とその展開図
<p style="text-align: center;">風車 C</p> 	<p style="text-align: center;">N=3</p> 
	<p style="text-align: center;">N=5</p> 
	<p style="text-align: center;">N=6</p> 
	<p style="text-align: center;">N=7</p> 
	<p style="text-align: center;">N=8</p> 

表 7.5: 風車 D の展開図の一般化結果

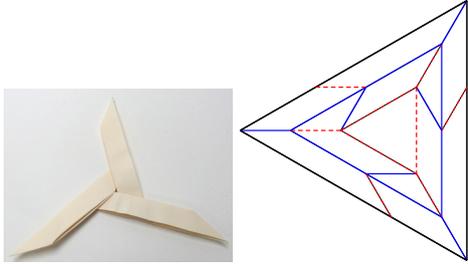
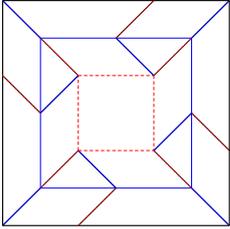
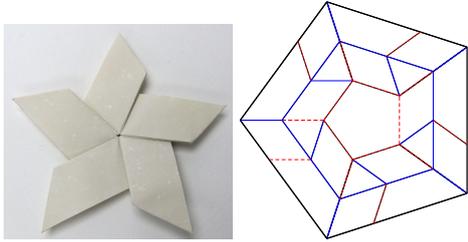
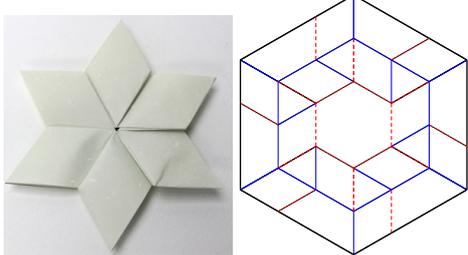
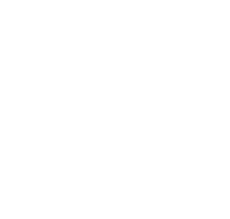
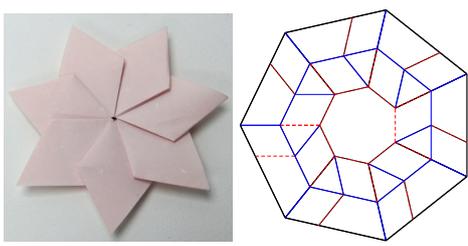
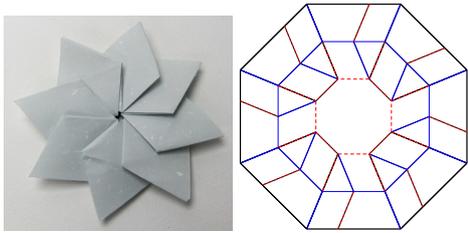
4 回折り紙とその展開図	N 回の結果とその展開図
<p style="text-align: center;">風車 D</p> 	<p style="text-align: center;">N=3</p> 
	<p style="text-align: center;">N=5</p> 
	<p style="text-align: center;">N=6</p> 
	<p style="text-align: center;">N=7</p> 
	<p style="text-align: center;">N=8</p> 

表 7.6: 風車 E の展開図の一般化結果

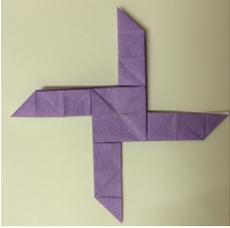
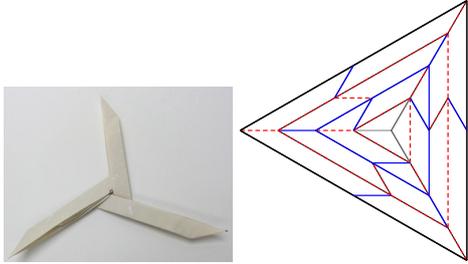
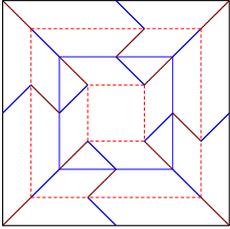
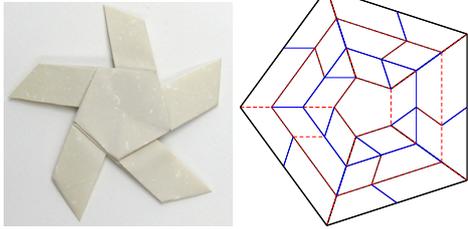
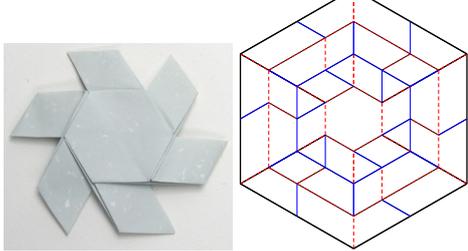
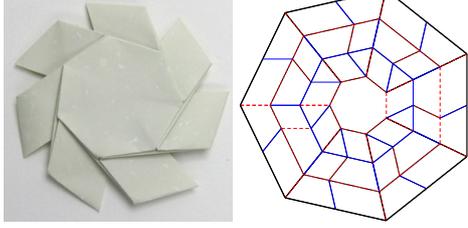
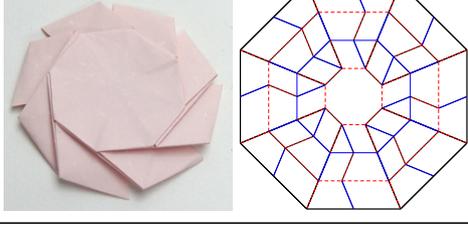
4 回折り紙とその展開図	N 回の結果とその展開図
<p style="text-align: center;">風車 E</p> 	<p style="text-align: center;">N=3</p> 
	<p style="text-align: center;">N=5</p> 
	<p style="text-align: center;">N=6</p> 
	<p style="text-align: center;">N=7</p> 
	<p style="text-align: center;">N=8</p> 

表 7.7: 風車 F の展開図の一般化結果

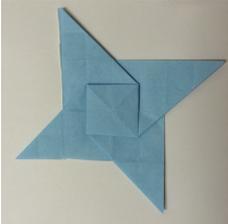
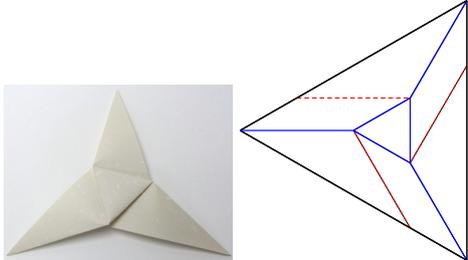
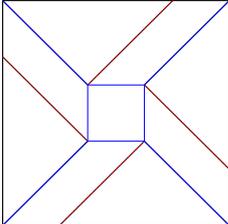
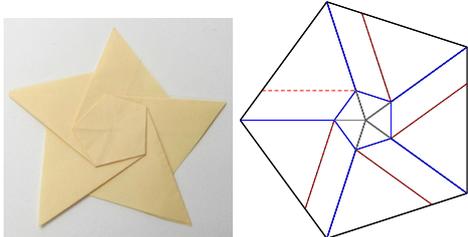
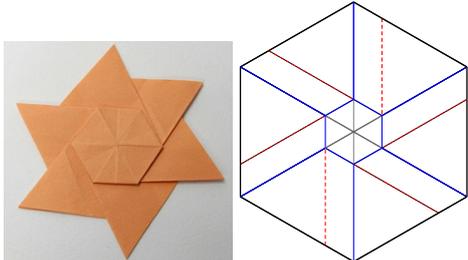
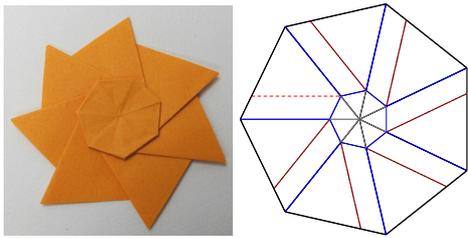
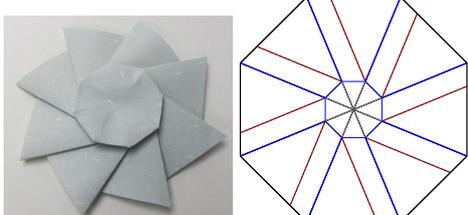
4 回折り紙とその展開図	N 回の結果とその展開図
<p style="text-align: center;">風車 F</p> 	<p style="text-align: center;">N=3</p> 
	<p style="text-align: center;">N=5</p> 
	<p style="text-align: center;">N=6</p> 
	<p style="text-align: center;">N=7</p> 
	<p style="text-align: center;">N=8</p> 

表 7.8: Table の展開図の一般化結果

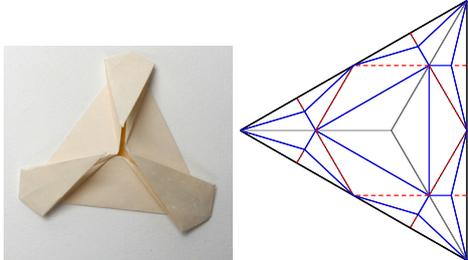
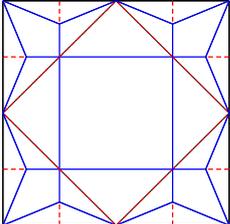
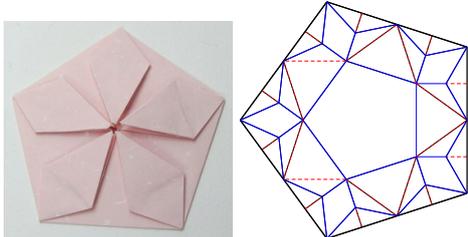
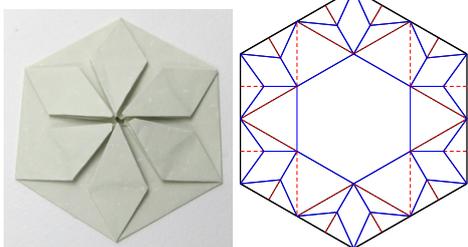
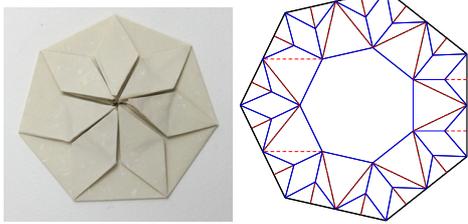
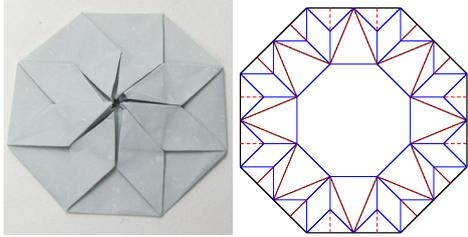
4 回折り紙とその展開図	N 回の結果とその展開図
<p style="text-align: center;">Table</p> 	<p style="text-align: center;">N=3</p> 
	<p style="text-align: center;">N=5</p> 
	<p style="text-align: center;">N=6</p> 
	<p style="text-align: center;">N=7</p> 
	<p style="text-align: center;">N=8</p> 

表 7.9: 風車の展開図の一般化結果

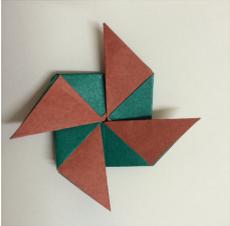
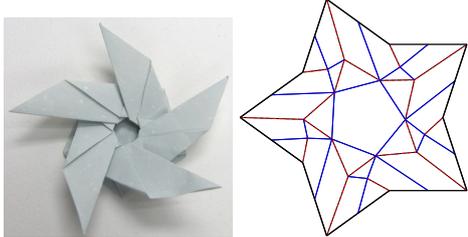
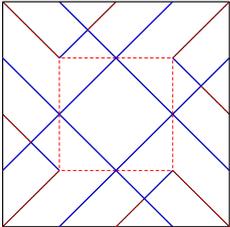
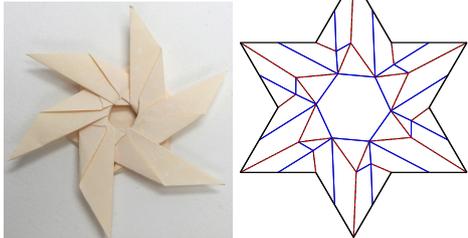
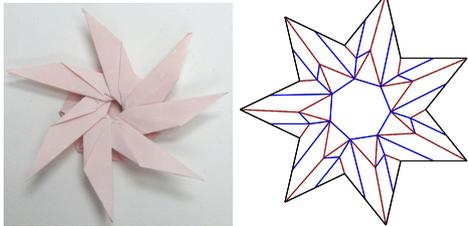
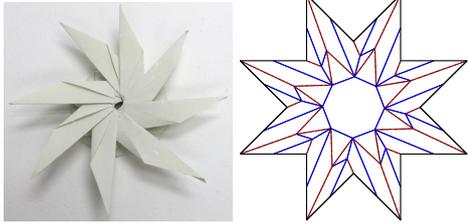
4回折り紙とその展開図	N回の結果とその展開図
<p style="text-align: center;">風車</p> 	<p style="text-align: center;">N=5</p> 
	<p style="text-align: center;">N=6</p> 
	<p style="text-align: center;">N=7</p> 
	<p style="text-align: center;">N=8</p> 

表 7.10: Snowflake の展開図の一般化結果

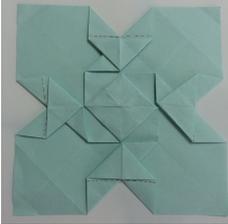
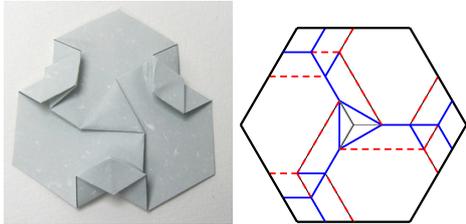
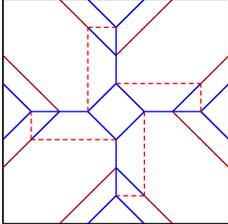
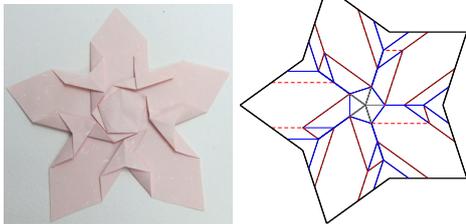
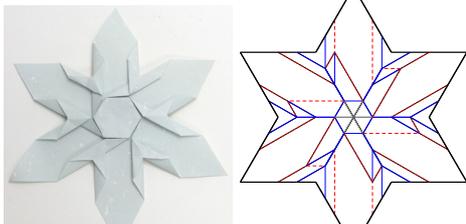
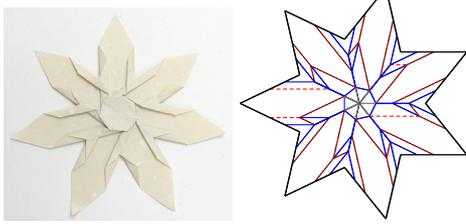
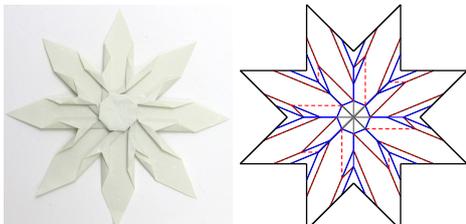
4 回折り紙とその展開図	N 回の結果とその展開図
<p style="text-align: center;">Snowflake</p> 	<p style="text-align: center;">N=3</p> 
	<p style="text-align: center;">N=5</p> 
	<p style="text-align: center;">N=6</p> 
	<p style="text-align: center;">N=7</p> 
	<p style="text-align: center;">N=8</p> 

表 7.11: Star の展開図の一般化結果

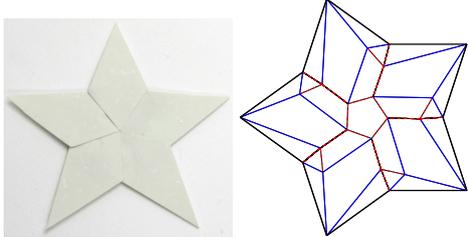
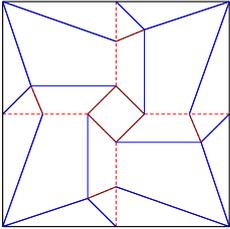
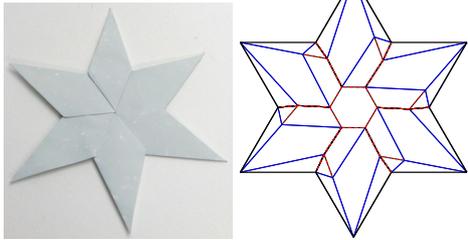
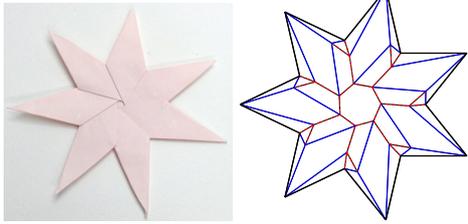
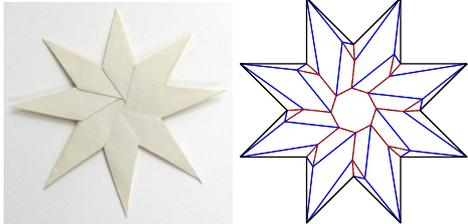
4 回折り紙とその展開図	N 回の結果とその展開図
<p style="text-align: center;">Star</p> 	<p style="text-align: center;">N=5</p> 
	<p style="text-align: center;">N=6</p> 
	<p style="text-align: center;">N=7</p> 
	<p style="text-align: center;">N=8</p> 

表 7.12: Seashell Star A の展開図の一般化結果

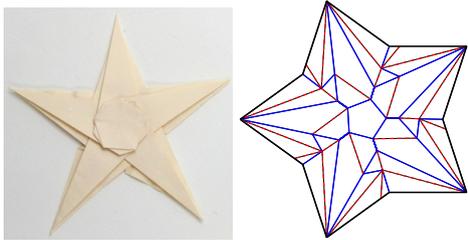
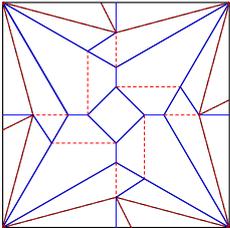
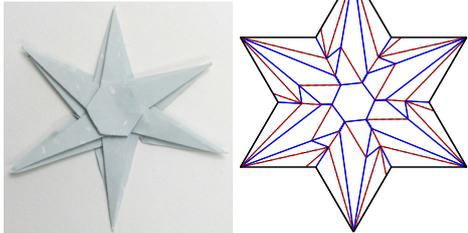
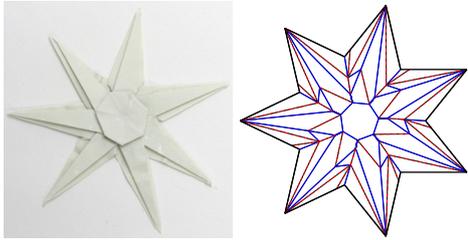
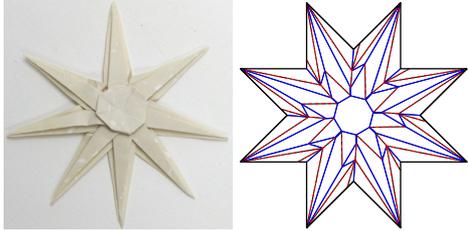
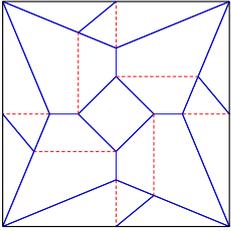
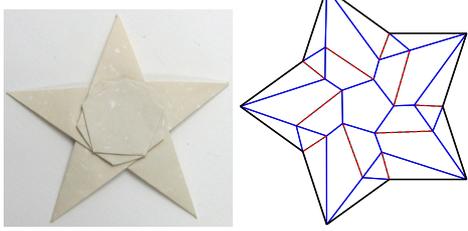
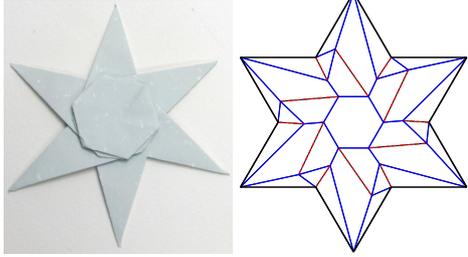
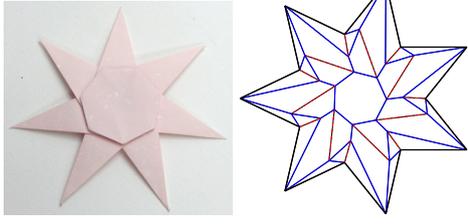
4 回折り紙とその展開図	N 回の結果とその展開図
<p style="text-align: center;">Seashell Star A</p> 	<p style="text-align: center;">N=5</p> 
	<p style="text-align: center;">N=6</p> 
	<p style="text-align: center;">N=7</p> 
	<p style="text-align: center;">N=8</p> 

表 7.13: Seashell Star B の展開図の一般化結果

4 回折り紙とその展開図	N 回の結果とその展開図
<p style="text-align: center;">Seashell Star B</p>  	<p style="text-align: center;">N=5</p>  <p style="text-align: center;">N=6</p>  <p style="text-align: center;">N=7</p>  <p style="text-align: center;">N=8</p> 