筑波大学大学院博士課程

システム情報工学研究科修士論文

45 度系格子パターンに含まれる局所平坦折り可能条件を満たす展開図とその平坦折り可能性に関する研究

松川剛久

修士（工学）

（コンピュータサイエンス専攻）

指導教員　三谷純

２０１７年　３月

概要

本研究では、正方形の輪郭に 2 つの対角線を追加した線図を縦に m、横に n だけ敷き詰めたものを、m×n の 45 度系格子パターンと呼び、それらを平坦に折りたたむことを研究対象とする。伝承折り紙として知られている風車、だまし船の展開図（折り線の位置を図にしたもの）を観察すると、その折り線は 4×4 の 45 度系格子パターンに重なる。このように、4×4 の 45 度系格子パターンには、いくつかの伝承折り紙の展開図が含まれることが知られている。この格子パターンから、平坦に折りたたんだ形状を何通り作り出すことができるかは、山本らによって初めて明らかにされた。山本らは 4×4 の 45 度系格子パターンに含まれる全ての局所平坦折り可能条件を満たす展開図と、それらを折りたたむことによって得られる形状を列挙した。しかしながら、山本らが列挙した展開図が大域的に平坦折り可能であることは自明でない。つまり、山本らが列挙した形状の中には実際には紙の衝突によって作りだせないものが含まれている可能性がある。本研究では 45 度系格子パターンに含まれる局所平坦折り可能条件を満たす展開図が、大域的に平坦折り可能であるか検証する手法を提案し、山本らが列挙した 13,452 通りの形状が実際に紙を折って作成できるものであることを確認した。また、山本らの提案手法と同様の方法で 2×2、3×3 の 45 度系格子パターンに含まれる局所平坦折り可能条件を満たす展開図を列挙し、展開図の数が、それぞれ 116、58,530 であり、折った後の形状が、それぞれ 27、366 であることを確認した。また、実際には平坦折りできない局所平坦折り可能条件を満たす展開図を複数見出し、その中で最も単純なものを 3×3 の 45 度系格子パターンの中に特定した。この最も単純な展開図は筆者らが知る限りでは、これまでに例がない性質を持ったものであった。更に本研究では、全ての自然数 n に対して、2×n の 45 度系格子パターンに含まれる局所平坦折り可能条件を満たす展開図は全て平坦折り可能であると予想し、その証明を試みた。完全な証明には至らなかったが、そのための道筋を示した。

目次

図目次

表目次

第1章　序論

1.1　研究の背景

1 枚の紙を折ることで形を作りだす「折り紙」は、日本に古くから伝わる伝統的な遊びであり、文化である。しかし、折り紙は単なる遊び、文化として捉えられるだけでなく、紙を折る操作の幾何学的な性質から数学の一分野として研究されてきた。それらの研究成果の一部として様々な形状を 1 枚の紙で設計する手法が確立し、従来の試行錯誤による作品創作では生み出すことができなかった複雑な形状を作りだすことに成功した。また、折り紙の持つ展開と折りたたみの性質は、人工衛星に乗せる太陽電池パネルや自動車のエアバッグなど様々な分野で工学的に応用されている。

折り紙が様々な分野で応用される背景には、折り紙の形状の設計手法の確立がある。折り紙の理論的な設計方法は、平らな素材から折って形状を作りだすことを可能にする。また、折り紙の構造の中には強度を高めるものもあり、その構造は工学的に応用されている。折り紙の設計に関する研究の多くは理論的に目的の形状を作りだしてきたが、鶴田らは理論的な設計手法は複雑な形状に適しているが、折り回数の少ないものには適してないという点に着目し、計算機の性能を利用した折り方と折り回数が限定される形状の列挙を行った [1]。鶴田らの研究によりこれまで発見されていなかった折り紙の形状を見つけ出すことができた。

また、近年では折り紙の技術は工学的な応用可能性が注目されており、機械工学においては折り紙型のロボットの研究がされている [2, 3]。文献 [2] で研究開発されている折り紙型ロボットの折り線は正方形とそれらの対角線のパターンに重なる。本論文では、このパターンを 45 度系格子パターンと呼ぶ (図 1.1)。45 度系格子パターンは折り線のなす角度が 45 の倍数となるため、単純な操作で折りたたみ可能ということから、折り紙の設計にはよく用いられる。風車やだまし船などの我が国で良く知られている古典折り紙の展開図を観察すると、その 45 度系格子パターンを発見できる（図 1.2)。

45 度系格子パターンを用いた折り紙設計はもっとも有名な設計方法の 1 つであるが、そのパターンから何通りの形状が作りだせるかは山本らの研究が発表されるまでは明らかになっていなかった [4]。山本らは対角線が追加された正方形領域を水平方向と垂直方向に 4 つずつ敷き詰めた 4×4 の 45 度系格子パターンに含まれる全ての局所平坦折り可能条件（詳細は 2.2.1 節に示す）を満たす展開図とそれらを平坦折り（紙を平坦に折りたたむこと）することによって得られる形状を列挙した。しかし、山本らが列挙した展開図は局所的に平坦折り可能であるが、展開図全体としては平坦折り可能である保証はない（以降、大域的に平坦折り可能であることを単に平坦折り可能と呼ぶ)。局所的に平坦折り可能であるが、平坦折りできない展開図は文献 [5, 6, 7] で示されており、そのような展開図が存在することが証明されている。よって、山本らが列挙した展開図には平坦折りできないものが含まれている可能性がある。平坦折りできない展開図が存在する場合、山本らが列挙した形状の中には実際には作りだせないものが含まれている可能性もある。

そこで、本研究では 45 度系格子パターンに含まれる展開図の平坦折り可能性評価手法を提案し、山本らが列挙した形状が実際に紙を折って作りだせるものなのか検証した。ところで、与えられた展開図の平坦折り可能性について数多くの研究がされている。Bern らは与えられた一般的な展開図が平坦折り可能かどうかの判定は NP 困難であると示した [5]。ま

た、45 度系格子パターンに含まれる展開図であっても、その平坦折り可能性の判定は NP 困難であると、Akitaya らによって示された。展開図の平坦折り可能性の評価は、それらの折り構造が折りたたむことができるか評価することと同値なので、幾何学的な観点からも平坦折り可能性は重要な問題である。

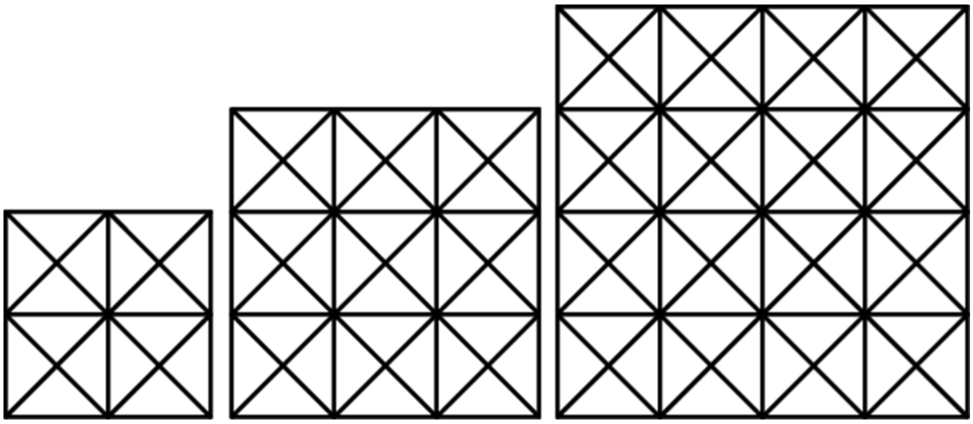


図 1.1　45 度系格子パターン。左から 2×2、3×3、4×4

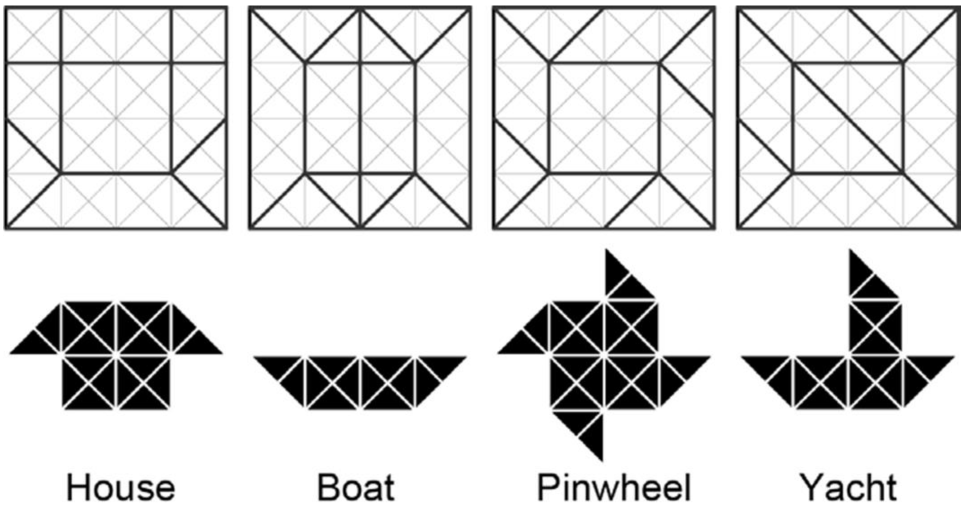


図 1.2　45 度系格子パターンに展開図が含まれる古典折り紙の例。上は展開図、下は平坦折り後の形状。左から家、船、風車、だまし船

1.2 本研究の目的

本研究の目的は、45 度系格子パターンに含まれる局所平坦折り可能条件を満たす展開図からどのような形状が作りだされるのか、またそれらの展開図の平坦折り可能性について評価することである。風車やだまし船などの有名な古典折り紙作品の展開図は、45 度系格子パターンに含まれるものとなる。また、45 度系を含む $90/n$ 度系を用いた折り紙設計手法が確立しており、その手法から様々な折り紙作品が作りだされている。このように、45 度系格子パターンを用いて様々な形状が作りだされてはいるが、そのパターンからどれだけの形状を作成できるか正確に検証したのは当研究室の山本らだけである [4]。しかし、山本らは紙の交差を考慮していないため、列挙された形状が実現可能（実際に紙を折って作りだせる）である保証はない。異なる展開図が同じ形状に折りたたまれることがあるが、ある形状に折りたたまれる展開図が全て平坦折りできないものである場合、その形状は実現不可能なものとなる。そこで、本研究では局所平坦折り可能条件を満たす展開図の平坦折り可能性の評価手法を提案し、列挙された形状が実際に作りだされるものであるのかを検証する。展開図が折りたためるのかの判定は NP 困難であり､形状の実現可能性を評価するには工夫が必要となるため、本研究ではその評価手法についても提案する。ちなみに、局所平坦折り可能条件を満たす展開図の中には平坦折りできないもの存在することが様々な文献によって示されている。それら平坦折りできない展開図の中には、45 度系格子パターンに含まれるものも存在している。

また、本研究の過程で 4×4 の局所平坦折り可能条件を満たす展開図には平坦折りできないものが含まれていることが判明した。そこで、45 度系格子パターンに含まれる平坦折りできない局所平坦折り可能条件を満たす展開図の最少単位（折り線数、折り線が交差する点の数、及び含まれる正方形領域数が最少となるもの）を見つけ出せないか検証するために 2×2、3×3 についても列挙を行った。更に、折り紙には、正方形ではなく長方形の紙を用いることで作品の幅を広げることがあるが、文献 [4] では、長方形の 45 度系格子パターンから作りだされる形状の列挙は行われていないため、本研究では、3×5 の 45 度系格子パターンについての列挙も行う。3×5 の格子パターンに限定したのは、列挙される展開図の個数が現代の計算機で対応可能な範囲で収まるからである。

更に、本研究によって、2×2、2×3、2×4 の 45 度系格子パターンに含まれる局所平坦折り可能条件を満たす展開図は全て平坦折り可能であることがわかった。また、2×5 の全ての形式的折り線図を列挙し、それらの平坦折り可能性の評価実験を行った。現在計算中であるが、折り線数が少ないものから平坦折り可能性を評価し、2×5 に含まれる全ての形式的折り線図 1,611,668 通りのうち、1,357,059 通り調べ、平坦折りできないものはなかった。そこで、本研究では「2×n の 45 度系格子パターンに含まれる局所平坦折り可能条件を満たす展開図は全て平坦折り可能である」と予想し、その証明を試みる。

以下に、本研究の目的をまとめる。また、以降、45 度系格子パターンに含まれる局所平坦折り可能条件を満たす展開図を単に「形式的折り線図」と呼ぶことにする。

- 2×2、3×3、及び 3×5 の形式的折り線図とその平坦折り後の形状の列挙（第 3 章） [6]
- 形式的折り線図の平坦折り可能性の評価と形状の実現可能性の評価（第 4 章） [6, 7, 8]
- 「2×n の形式的折り線図は全て平坦折り可能である」ことの証明（第 5 章）

1.3　本研究の貢献

これまでの新しい折り紙の形状の提示の多くは、目的の形状を作りだすための理論的な設計手法に関する研究によってなされてきた。しかし鶴田らは、折り紙の形状の提示の新たなアプローチとして、限定された折り方と折り回数で得られる形状の列挙に関する研究を行った [9, 1]。そして山本らは 45 度系格子パターンから作りだされる形状の列挙の研究に関する研究を行った [4]。両者の研究では、これまで認識されていなかった折り紙の形状が発見され、新たな知見を得ることができた。しかし山本らが列挙した形状は、紙の自己交差を考慮していないため、それらの形状が実現可能かは明らかになっていなかった。本研究では、山本らが列挙した形状が実際に得ることができるものかを検証し、それらの形状が実現可能であることを確認した。更に山本らの列挙手法を利用し、山本らも発見していない新しい形状を発見し、新しい折り紙の形状の提示関する研究の発展には、列挙という手段は重要であることを本研究でも確認できた。

また、折り紙に関する研究において展開図の平坦折り可能性は重要な研究課題であるが、平坦折りできない局所平坦折り可能条件を満たす展開図が存在することが知られている [10]。詳細は 4.4 節で示すが、本研究によって著者らが知る限りではこれまでに例がない性質を持った平坦折りできない局所平坦折り可能条件を満たす展開図を発見した。この発見により本研究は、計算幾何学の一分野として発展している計算折り紙において新たに知見を提示した。

1.4　本論文の構成

本論文は本章を含めて全 6 章で構成される。第 2 章では本研究に関連した研究を紹介する。第 3 章では形式的折り線図とその平坦折り後の形状の列挙手法ついて示す。第 4 章では形式的折り線図の平坦折り可能性の評価手法について、第 5 章では $2 \times n$ の形式的折り線図の平坦折り可能性について示す。第 6 章ではそれらの結果と今後の展望について示す。

1.5　本論文の用語

本節では本論文で取り扱う用語について示す。

- 平坦折り：紙を平坦に折りたたむ操作
- 展開図：紙の輪郭と折り線の位置を図示したもの
- 山谷付き展開図：折り線に山谷が割り当てられた展開図
- 構成面：展開図上の折り線で区切られた多角形
- 頂点：展開図内部に存在する折り線の交点

展開図には一般的に複数の頂点が存在するが、各々の頂点まわりが平坦に折りたたむことが可能（局所平坦折り可能条件を満たす）で、なおかつ、山谷が割り当てられていないものを川崎は形式的折り線図 [11] と呼び、Hull は Phantom Pattern [12] と呼んでいる。本論文では形式的折り線図と呼ぶことにする。山本らが列挙した局所平坦折り可能条件を満たす展開図は形式的折り線図のことである。

第2章　関連研究

幾何学的な性質持つ折り紙は数学の一分野として研究されてきた。折り紙数学は様々な広がりを見せ、近年では工学的な応用がされている。本章では折り紙に関する研究の中で本研究に関連するもの紹介する。

まず、2.1 節では折り紙の技術が宇宙や医療などの様々な分野に応用される要因となった折り紙数学の発展の歴史を紹介する。折り紙数学の歴史において、本研究でも取り扱う展開図の平坦折り可能性に関する研究は大きな役割を果たしており、それらの研究が折り紙数学発展のきっかけとなった。

2.2 節では、様々な平坦折り可能性に関する研究を紹介する。本研究の形式的折り線図の列挙は 2.2 節で紹介されている局所平坦折り可能条件を用いている。

2.3 節では折り紙設計に関する話題を取り上げる。設計に関するアルゴリズムが確立したことにより、これまで試行錯誤で作品を創作してきたが、数学的なアプローチが可能になり、より複雑な、または、これまで発見されていなかった形状を作成することが可能になった。また、鶴田ら [1, 9] による折り紙の形状の列挙によっても、これまで未発見だった形状が発見された。

2.4 節では折り紙に関係の深い数学とパズルに関する研究を紹介する。2.4 節では、数学的なアプローチによってアルファベットの形状を折りたたむ方法を示す。本研究によっても、アルファベットと数字を模した形状が得られた。

2.5 節では折り紙の技術を工学的に応用することを目的とした研究を紹介する。45 度系格子パターンは折り紙型ロボットの折り構造にも活用されている。

2.1　折り紙数学の歴史

文献 [13] によると、折り紙を幾何学の分野で取り扱った最古の文献は 1840 年に出版された Lardner [14] によるものである。また、ユークリッド幾何学に代わる新たな作図法として、折り紙を利用した研究についてまとめられた文献が 1893 年に出版されている [15]。1930 年代には折り紙による 3 次方程式の解法の可能性について Beloch [16] によって言及された。

20 世紀末には折り紙の平坦折り可能性についての研究が発表され始めた。折り線の交差する 1 つの点のまわりに着目し、その平坦折りに関する定理が発表された。それらの定理は複数の人物によって同時期に独立で発見され [17, 18, 19]、それらの研究を機に平坦折り可能性についての研究が盛んになってきたと考えられる。1996 年には、Bern らによって、与えられた展開図が平坦折り可能かどうかの判定は NP 困難であると示された [5]。また、1994 年には Hull によって局所的には平坦折り可能であるが、展開図全体では折りたためないものが示された [10]。

一方で、1980〜1990 年代に折り紙作品が急速に複雑化した。その要因の一つとしては、Tree method を代表とする折り紙設計手法の確立と普及が考えられる。計算機の性能向上と一般への普及を受けて、折り紙設計手法は計算機へ実装された。今日に至るまで、折り紙設計に関する様々なアルゴリズムが開発され、実装されてきた。Tree method を計算機に実装

した Tree Maker をはじめとする数多くの折り紙設計ソフトウェアはウェブ上で公開されている。

このように、1980 ～ 1990 年代には折り紙数学に関する研究が盛んになり、1989 年には折り紙の国際会議 The International meeting of Origami Science and Technology がイタリアで開催された。折り紙に関する研究の発展から、Demaine らは計算折り紙（Computational Origami）という用語を用いて、2002 年当時の折り紙に関する研究の動向をまとめた [20]。

現在では折り紙は宇宙、医療、家具などの様々な分野に応用され、世界中で研究されている。

2.2 平坦折り可能性

展開図の平坦折り可能性について様々な研究がされている。一般的な展開図の平坦折り可能性は困難な問題であり、平坦折り可能であるか判定する効率的なアルゴリズムは存在しない。平坦折り可能性の研究は、山谷の割り当ての数や紙の重なり順序の数など、組み合わせ論の問題としても取り上げられる。本節ではそれらの平坦折り可能性に関する研究について紹介ずる。

2.2.1 1 頂点平坦折り

展開図の平坦折り可能性は折り紙研究においてよく議論される。この問題に対する基本的な考え方として、1 頂点平坦折り、すなわち紙の内部に存在する頂点が 1 つのみの展開図の平坦折りについて考える。

局所平坦折り可能条件

一般的な展開図の内部には複数の頂点が存在する。展開図上の各々の頂点周りが全て平らに折りたたみ可能であるならば、その展開図を局所平坦折り可能なものと呼ぶ。局所平坦折り可能であることは、展開図が全体として平坦折り可能であるための必要条件であるが十分条件ではない。展開図の大域的な折りたたみを考えるとき、紙の交差という物理的な制約を考慮する必要があるためである。

1 頂点が平坦折り可能であるための局所平坦折り条件について、以下の定理が知られている [13, 21]。

- 頂点 v が平坦折り可能であるとき、山折りと谷折りの数をそれぞれ M と V とすると、v まわりにおいては $M-V=\pm 2$ である（前川定理（Maekawa's Theorem））
- 平坦折り可能な 1 頂点の次数は（折り線の数）は常に偶数である（偶数次数定理（Even Degree Theorem））
- 平坦折り可能な 1 頂点において、隣り合う 3 つの角 $\alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}$ が $\alpha_{i-1} > \alpha_i$ 及び $\alpha_i < \alpha_{i+1}$ であるとき、それらの 3 つの角の間にある折り線の山谷は異なる（大小大定理（Big-Little-Big Angle Theorem））
- 頂点 v が平坦折り可能であるとき、v まわりの 1 つ置きの角の和は 180° になる（川崎定理（Kawasaki's Theorems））
- 平坦折り可能な 1 頂点において、2 本の折り線の間の角度は常に 180° 以下である（角度の定理（Angle Theorem））

2.2.2 展開図の平坦折り可能性

与えられた展開図が平坦折りできるかについて、Bern らはその判定は NP 困難であると証明した [5]。展開図の平坦折り可能性の評価は困難な問題であり、それゆえに多くの研究がされている。また、与えられた展開図の平坦に折りたたまれた状態はいくつ存在するのか、平坦折り可能な山谷の割り当てはいくつあるかといった組み合わせ論の問題としても平坦折りは取り上げられる。

大域的な折りたたみの困難性

Bern らは与えられた展開図が平坦折り可能であるかの判定は NP 困難であると示した [5]。山谷つき展開図であってもその NP 困難性は変わらない。また、45 度系格子パターンに含まれる展開図についても、山谷が付与されている場合であっても、平坦折り可能であるかの判定は NP 困難であると Akitaya らによって示された [22]。

「直交格子上に折り線が乗る展開図が山谷付きで与えられたとき、それが平坦折り可能であるか判定するために要する計算量はどのくらいか」という問題は地図折り問題として知られている [13, 23]。$1 \times n$ については線形時間で判定できるが、$2 \times n$ になってしまうと、その地図折り問題は未解決問題である。

平坦折りできない形式的折り線図

局所平坦折り可能条件は満たすが、大域的には平坦折りできない展開図が Hull によって示されている (図 2.1)。また、45 度系格子パターンに含まれる局所的に平坦折りできるが、大域的には平坦折りできない展開図も川崎 [11] と舘[1]によって見つけだされている (図 2.2)。

局所平坦折り可能条件は満たす展開図は形式的折り線図とも呼ぶが、形式的折り線図が平坦折りできない理由は、以下の 2 つに大別される。いずれの理由も紙の自己交差に帰着する。

(a) 平坦折り可能な山谷割当を持たない

(b) 平坦折り可能な山谷割当を持つが折りたたむ際に紙の自己交差が生じる

(a) と (b) についての詳細と図 2.1 と図 2.2 の展開図の平坦折りできない理由については 4.1.1 節で述べる。

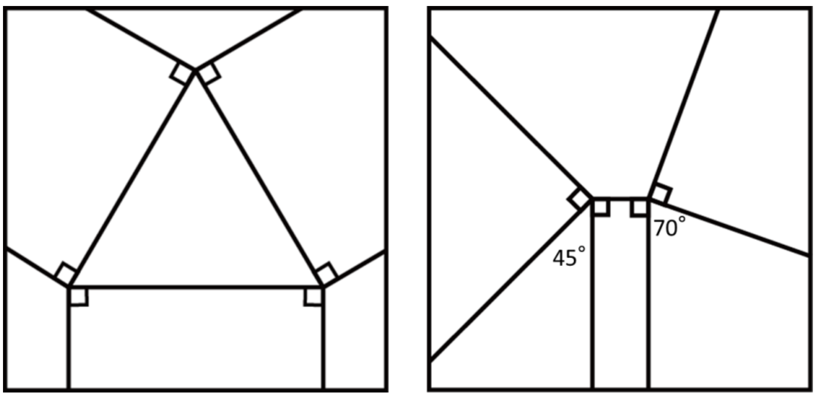


図 2.1 Hull によって示された平坦折りできない展開図 [24]

1 私信、2014/12/14

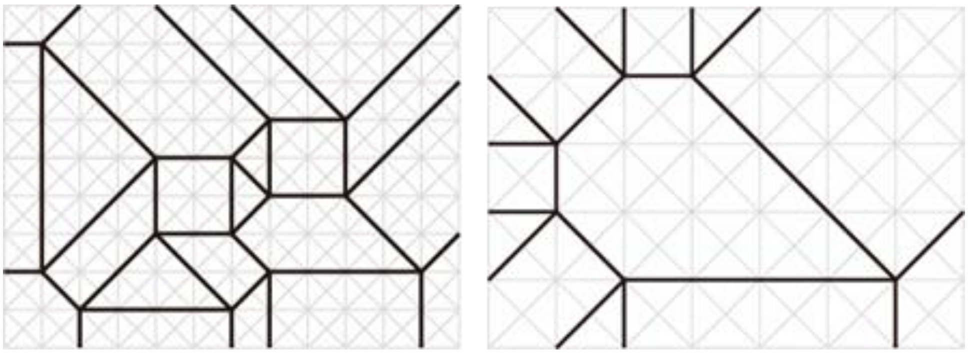


図 2.2　45 度系格子パターンに含まれる平坦折りできない展開図。左は川崎、右は舘による

重なり順序

平坦折り紙は、紙の輪郭と折り線によって折りたたまれた状態の外形を決定できるが、紙の重なり方を決定することは難しい問題である。平面上で互いに重なる 2 つの構成面（折り線で区切られた多角形）のどちらが上に来るのかという折り状態を記述したものを重なり順序という。Bern らは大域的な平坦折り可能性を判定する困難さはこの重なり順序を計算することであることを示した [5]。また、三谷は計算機内に構成面を重なっている順に格納するスタックを用意して、実現可能な重なり順序を総当たりで数え上げる手法を提案した [25, 26]。

紙に等間隔の山折りと谷折りの列を配置し、何通りの折りたたまれた状態が存在するかという切手折り問題がある。Uehara らは、ある折り目の伸びをその折り目に挟まった他の紙の枚数と定義し、紙の伸びを最小化する折りたたみに関する研究を行っている [27, 28]。

山谷の割り当て

平坦折り紙の研究では「与えられた展開図に平坦折り可能な山谷の割り当ては何通りあるか」という問題がよく取り上げられる。平坦折り紙の数え上げ問題は一般的に解くのは難しい。任意の頂点が 1 つだけの展開図であれば、山谷の割り当ての数を正確に求める漸化式が存在する [29]。

Hull は山谷の割り当ての数え上げをグラフ理論への抽象化を行っている [29, 10, 30]。折り線を頂点とみなし、頂点塗り分け問題に当てはめ、その塗り分け方の数が山谷の割り当ての数に対応する。しかし、それらの手法はまだ一般的な展開図に適用することはできず、特定のパターンしか解を求めることができない。文献 [30] では頂点の次数が 4 を超えると特に難しいと示している。

山谷の割り当ての数え上げは物理学や物理化学の分野にも関連する。特に高分子膜の折れ曲がりに関する研究で同じ性質の問題が取り上げられている。天然の高分子膜は格子の構造をしている。格子を作る分子結合は折り線として折れ曲がり、力学的な解析としてその折り方の数え上げについて研究されている [31]。

2.3　折り紙設計

折り紙が数学の一分野として研究され、それまでは作家が試行錯誤のアプローチで作品を創作していたのが、折り紙の設計手法が確立し、数学的なアプローチが可能になった。本項では、折り紙の設計手法に加えて、折り紙制作を支援する研究と、形を提示するための新たなアプローチとして、目的の形を作りだす設計手法とは異なる、形の列挙に関する研究を紹介する。

2.3.1　平坦折り紙設計

Tree method

折り紙において、目的の形状を線分の集合（木構造）として見なし、その構造の長さと繋がりを折り出すのに必要となる円形領域を展開図上に配置する手法がある。平坦折り後は単軸基本形（Uniaxial base）と呼ばれる、平らにつぶしたとき同一の平面上に乗る構造となる。この手法に基づく設計アルゴリズムは tree method や circle packing などと呼ばれる。

circle packing アルゴリズムを実装した Tree Maker と呼ばれる折り紙設計ソフトウェアがある [32]。目的の形状の木構造を入力し、単軸基本形に折られる展開図が出力される。出力された展開図は基本構造に折られるものであるため、細部の形状のデザインはユーザにゆだねられている。

折り紙テッセレーション

幾何学的なパターンを並べて模様が出現するように紙を折りたたむことを折り紙テッセレーション（Tessellation）または平織りと呼ぶ [33]。折り紙テッセレーションの多くは、ねじり折りと呼ばれる折りのパターンを要素として構成される。基本的な多角形を敷き詰めたパターンと中心となる図形の大きさ、傾きの角度を入力し、折り紙テッセレーションを生成する Tess と呼ばれる設計ソフトウェアがある [34]。

ORIPA

ORIPA は折り紙の展開図を計算機に効率的に入力できる専用エディタである [35, 36]。入力された展開図の平坦折り後の形状を出力することも可能で、展開図の平坦折り可能性の判定もできる。ORIPA は与えられた展開図の構成面を折り線を軸とする鏡映反転を繰り返すことで、平坦折り後の形状を出力する。展開図が平坦折り可能であるかの判定は NP 困難であるため、ORIPA では紙の交差が発生する構成面の重なり順序を早い段階で枝刈りすることで高速に判定をしている。

形状の列挙

circle packing などの既存の設計手法は体系的に複雑な作品を作成するのに有効である一方、数回の折りたたみで完成する単純な折り紙作品には適していない。鶴田らは折り紙において頻繁に用いられる折り操作のみ使用し、また折り回数を 4 回以下に限定した平坦折り後の形状の列挙の手法を提案した [9, 1]。さらに鶴田らはユーザが目的の形状を入力することで、その形状に類似したものを出力するシステムを開発した。これまでの新しい折り紙の形状の提示は目的の形状を作りだす設計理論の確立によって行われてきたが、理論的ではなく計算機の性能を活用した列挙により新しい形状を発見する鶴田らの研究は、形状の提示に関する新しい取り組みであるといえる。また、鶴田らは形状の列挙は、指定された折り方で

折りたたまれる形状をすべて得ることができる一方で、折り回数が多くなると列挙が困難になるという問題があるため、ランダムに平坦折り後の形状を自動生成して、それらを提示するシステムも提案した [37]。

2.3.2　立体折り紙設計

直線折りと曲線折り

平坦に紙を折りたたむ平坦折り紙だけでなく、立体形状を 1 枚の紙を折って作りだす立体折り紙設計に関する研究もある。Tachi は三角形の集合で表現された 3 次元形状を入力とし、円板と同相の多面体モデルの展開図を自動生成するソフトウェア Origamizer を開発した [38]。Origamizer は入力した形状の各々の三角形を操作し、複数の三角形の隙間にひだを割り当てることで立体折り紙を設計している。また、Zhao らは展開図の一部を入力することで、三角形から構成される軸対称の立体折り紙を対話的に設計する手法を提案した [39]。

紙はしなやかに曲げることが可能であるため、折られた形または折り線が直線でない曲線折りで折り紙作品を作りだすことができる。ハフマン符号で有名なデビット・ハフマンは曲線折りに関する研究をしていたことでも知られている [40]。Mitani は断面となる折れ線を入力することで、軸対称な形を内側に包むような形状を設計できるソフトウェアを開発した [41]。このソフトウェアで作りだした形状は 1 枚の紙で作成可能で、展開図も自動生成される。また、Mitani は可展面の任意の点を選択し、平面上で鏡映反転することで曲面折り紙を生成するソフトウェアも開発した [42]。

剛体折り紙

折り紙を剛性の板を折り線に沿って切ってヒンジで連結させたモデルに置き換えたものを剛体折り紙と呼ぶ。三浦はガウス曲率を用いて剛体折り紙をモデル化した [43]。また、剛体折り紙に関する研究で有名なものとして、平坦に折りたたまれるようにデザインされた一般的なデパートの紙袋は面を曲げることなく折りたたむことはできないという結果を示したものがある [44]。つまり、一般的デパートの紙袋は剛体折り紙ではないということになる。

Tachi によって、剛体折り紙の折りたたみをシミュレーションするソフトウェア Rigid Origami Simulator が開発された [45, 46]。Rigid Origami Simulator は与えられた展開図を剛体折りする様子をアニメーションで表示するため、視覚的に剛体折り紙の変形を確認できる。また、Tachi は Rigid Origami Simulator を発展させた Freeform Origami も開発した [47]。Freeform Origami は平坦折り可能であり、なおかつ、剛体折り可能という条件を満たしながら、展開図と折った後の形を同時に編集できる。

2.3.3　$90/n$ 度系を用いた折り紙設計

折り紙において、15 度、22.5 度、45 度といった $90/n$ 度系を用いて展開図を設計することが多い [4, 48, 49, 50]。その代表例として、有名な古典折り紙である折り鶴の展開図は構成面の内角がそれぞれ 22.5 度の自然数倍である [49]。また、風車やだまし船などにも 45 度系格子パターンがみられる [51]。

$90/n$ 度系に関する数学的な研究としては、Tachi らは折り線のなす角度が 22.5 の倍数にした場合の頂点の 2 次元平面の座標値を 2 つの整数と非負整数を用いて公式化できる

と示した [52]。また、Benbernou らによって 45 度系格子パターンから任意のポリキューブ（複数の立方体を面で接合した多面体）を設計する手法が提案されている [53]。

2.3.4 折り紙制作支援

折り紙の初心者が展開図だけで作品を作るのは困難である。折り紙の折りの手順を図にして、初心者にも作品を作りやすくする方法は吉澤章によって考案された [54]。しかし、オリジナルの作品の折り図を作成するには時間がかかる。そこで、Akitaya らは展開図を入力して、自動で折り図を生成するシステムを提案した [55]。このシステムは平坦折り紙を対象としているため、これを用いれば本研究で列挙された展開図から初心者でも折りたたみやすいような折り図が作成できる。また、鶴田らは折り図を描く手間を省くために、折り図における次の手順を予測するシステムを提案した [56]。鶴田らのシステムは、次に予測される手順には同一線上にない複数の折り線で折った操作を候補として含んでいないため、幼児向けのような簡単な折り紙には適しているが、複雑なものには適していない。

2.4 数学とパズル

「目的の形を得るためには紙をどのように折りたためばいいのか」など、折り紙はパズルとしての面を持つ。折り紙の設計手法は、このような問題を数学的なアプローチで解決している。本節では、折り紙の数学とパズルの性質に着目した研究を紹介する。

2.4.1 フォント作成

折り紙は折ることで形を自由に変形することができるため、ひらがなやカタカナに模した作品も創作されている [57]。Erik らは紙を折ることで任意の迷路を作成するアルゴリズムを提案した [58]。そのアルゴリズムを用いて文字を作成する Web アプリケーションが公開された [59, 60]。Erik らは他にもヒンジや、ベルトとピンなどでフォントを作成している [61, 62]。

2.4.2 Origami Checkerboard

「表裏が色の違う正方形の紙を折り、格子上の一部の正方形の色が異なるパターンを出現させるための最少の折りの手数はいくつであるか」という問題が知られている [63]。現在でも、その最少とされる折りの手数は更新され続け、パズルの研究として興味深い対象である。この問題は、紙の表裏の色の違い、折ることにより紙の一部が反転するといった、折り紙の性質を利用したパズルである。

2.5 折り紙の工学的応用

2.5.1 産業分野への応用

折り紙の構造は展開と折りたたみの性質を持っているため、ものをコンパクトに折りたたむ、また、使用時に瞬時に展開するといった工学的な応用可能性を持っている。折り紙の技術に関する応用の代表例としては、人工衛星に乗せる太陽パネルの折りたたみと展開が挙げられる [64]。大型のパネルを人工衛星によって運搬する際は、小さく折りたたまれた状態にし、宇宙空間で使用する際には展開する。これによって、小さな部品に分解してから組み立てるという工程が不要になる。折り紙の展開と折りたたみの技術的な応用例はほかにも数多く存在している。例えば自動車のエアバッグである [65]。エアバッグが衝突時に素早く展開できるようにするために折り紙の設計理論が活用されている。また、コレステロールなどより血管が狭くなった箇所を広げるために、ステントとステントグラフトと呼ばれる医療器具が活用されているが、それらを折り紙でよく見られる折りパターンで設計することを提案している研究がある [66]。また、災害時用の簡易的な避難用シェルター [67]や折りたたみ傘 [68] などの例もある。山折りと谷折りを交互に繰り返すジャバラ折りはロボットの関節部の防塵用カバーや鉄道車両の連結用幌などに用いられる。

折り紙の折りの構造は展開や折りたたみだけではなく、工業製品の強度を高めるためにも活用されている。円筒状の構造体を縦に潰すとひし形が規則正しく並んだ模様ができる。その模様は吉村パターンと呼ばれるが、吉村パターンを持った構造は強度が増していることが判明し、飲料缶の形状に活用されている [69]。また、反転螺旋形円筒折り紙構造と呼ばれる折りの構造は、衝突時に衝撃を吸収するために自動車のサイドメンバに応用することを目的とした研究もある [70]。

2.5.2 Self-folding

折り紙を工学的に応用する上で重要な自己折り（Self-folding）に関する研究も盛んに行われている。例えば、Liu らは折線部を黒に着色したポリマーシートを加熱することで、立体的な形状を作りだす研究を行っている [71]。機械工学の分野では、 Hawkes らは折りたたむことで変形する折り紙型のロボットの研究開発をしている [2]。このロボットの折り線は垂直線、水平線、対角線が並んでいる 45 度系格子パターンから構成されており、折り線部に形状記憶合金ヒンジと電子機器を取り付けることで平面から立体へと形状を変化させる。また、1 つの平面形状が自らを折ることで立体化し、歩き出すロボットが開発されている [72]。

第3章　　形式的折り線図とその平坦折り後の形状の列挙

本章では、45 度系格子パターンに含まれる形式的折り線図とその平坦折り後の形状の列挙について示す。山本らは 4×4 の 45 度系格子パターンに含まれる形式的折り線図とそれらの平坦折り後の形状の列挙を行った [4]。本研究は山本らの研究を引継ぎ、山本らが行っていない 2×2、3×3、及び 3×5 についての列挙を行った。それらの 45 度系格子パターンに着目したのは、2×2、3×3 については、4×4 で平坦折りできない形式的折り線図が発見されたため、より単純な（折り線数、頂点数、及び正方形領域の数が少ないもの）平坦折りできないものを探し出せないか検証するため列挙を行った。3×5 については、山本らが長方形の形式的折り線図を対象としていなかった、また列挙される形式的折り線図の数が現代の計算機に対応可能な範囲のため列挙を行った。更に本研究では、アルファベットと数字を模した形状が発見されたため、それらの形状を利用した Web アプリケーションを開発した。

3.1 節では、山本らが行った形式的折り線図とそれらの平坦折り後の形状の列挙について示す。3.2 節では、本研究によって 2×2 及び 3×3 に山本らの手法を適応させた結果を示す。節 3.3 では 3×5 の形式的折り線図とそれらの平坦折り後の形状の列挙について示す。3×5 については、形状を算出するための幾何計算の際に、形状が形式的折り線図の領域をはみ出てしまう問題があったため、その解決策を本研究では提案している。節 3.4 では、本研究で発見されたアルファベットと数字を模した形状を利用して開発した Web アプリケーション ORIGAMI FONT について示す。節 3.5 では、まとめと考察について示す。

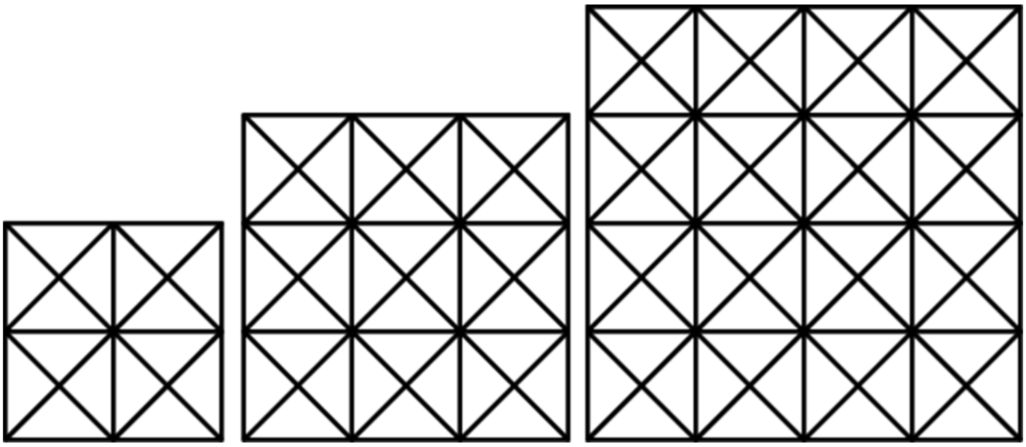


図 3.1　4×4 の 45 度系格子パターン。左から 2×2、3×3、4×4（再掲）

3.1　山本らの研究

本研究は山本らの研究を引継いだ研究であるため、本節で山本らの研究を紹介する。山本らは 4×4 の 45 度系格子パターンから何通りの形状が作りだされるのか検証した。4×4 について列挙を行ったのは、だまし船や風車などの有名な古典折り紙の展開図がその 45 度系格子パターンに含まれるうえに、列挙される形式的折り線図の数が計算機にとって十分対応可能な範囲に収まると予想したからである。また、列挙された形状が 13,452 通りであったため全体を目視することが困難であったことから、山本らは意図した形状を検索するシステムを開発した。そのシステムより、アルファベットと数字を模した意味を持つ形状を発見した。

3.1.1 節では、1 つ形式的折り線図をどのような形式で取り扱っているのかについて示し、それらの列挙方法と結果を示す。

山本らは形状の算出については、三谷が開発した ORIPA [36] を使用している。しかし、形状の重複を避けるための正確な比較をするには通常の ORIPA では困難であるため、山本らは ORIPA を改良した。3.1.2 節では、ORIPA の改良点と 1 つの形状データの取り扱い方、そして形状列挙の結果を示す。

3.1.3 節では、目的の形状を検索するシステム CP finder について示す。

3.1.1　形式的折り線図の列挙

形式的折り線図とは山折り谷折りの割当がされていない各頂点周りでは平坦折り可能な展開図である。形式的折り線図の各頂点は川崎定理を満たしている。川崎定理によると、1 頂点平坦折り可能な場合、1 つおきの折り線のなす角度の和は 180 度である。川崎定理は 1 つの頂点周りに注目した局所的な定理であり、形式的折り線図全体としては紙の自己交差が生じる可能性があるため平坦折り可能である保証はない。

本節ではこのような性質を持った形式的折り線図の中で 45 度系格子パターンに含まれるものの列挙手法について示す。

形式的折り線図のデータ構造

4×4 の 45 度系格子パターンの内部には 16 個の 4 価頂点と 9 個の 8 価頂点が存在する。 4 価頂点について、1 頂点平坦折り可能な折り線のパターンは図 3.2 で示された 4 パターンのみである。よって、4 価頂点の同一直線上に乗る 2 本の折り線を連結して 1 本とみなすことが可能である。その結果、45 度系格子パターンには、境界の辺（つまり、紙の輪郭）を除けば、垂直線と水平線の線分がそれぞれ 12 本ずつ、また対角線が 32 本の合計 56 本の折り線が存在することになり、各形式的折り線図は 64bit の整数型として表現でき、形式的折り線図の数の上限は 2^{56} となる。1 つ 形式的折り線図において 45 度系格子パターンの内部に存在する 56 本の線分に ID 番号を割り振り、ID 番号に対応した折り線の有無を 1 と 0 で表す。

形式的折り線図の列挙

本手法では、8 価頂点における 1 頂点平坦折り可能な 36 パターンを組み合わせることで形式的折り線図を列挙する (図 3.2)。具体的には 8 価頂点における 1 頂点平坦折り可能なパターンを頂点間で共有する折り線が矛盾しないように 45 度系格子パターンに配置する。パターンの配置には計算時間の節約のため、深さ優先探索アルゴリズムを用いて、頂点

間で折り線の矛盾が生じた場合は枝刈りをする。1 頂点平坦折り可能なパターンを配置した後は、それにより得られた形式的折り線図に対して 4 隅の折り線の有無（図 3.3）を組み合わせたもの（16 通り）を最終的な形式的折り線図として列挙する。

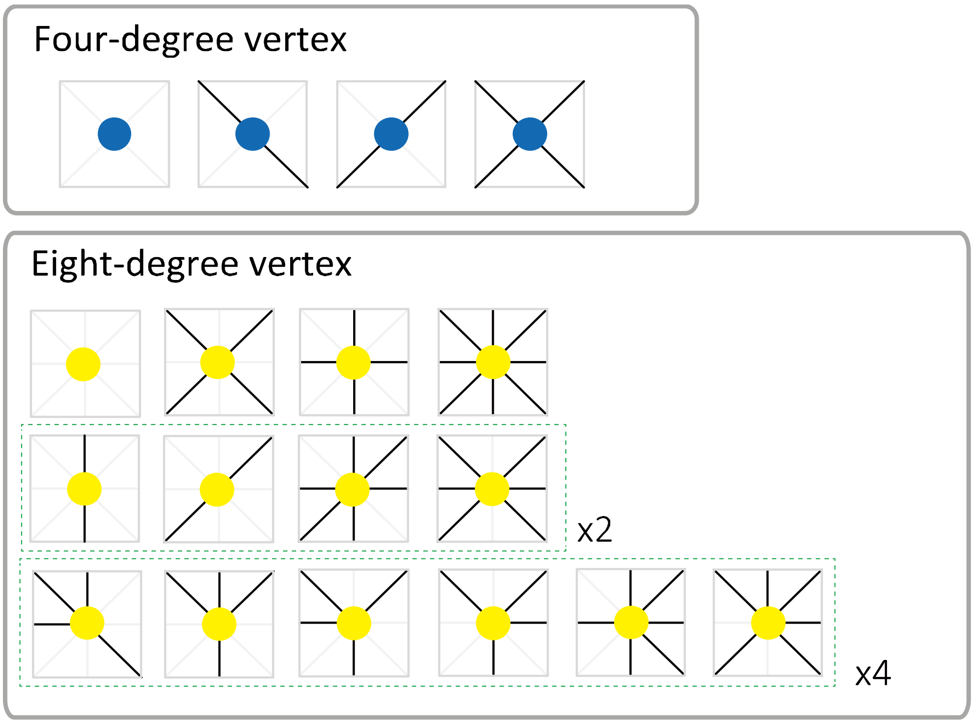


図 3.2　45 度系格子パターンにおける局所平坦折り可能条件を満たす 1 頂点のパターン。上は 4 価頂点。下は 8 価頂点

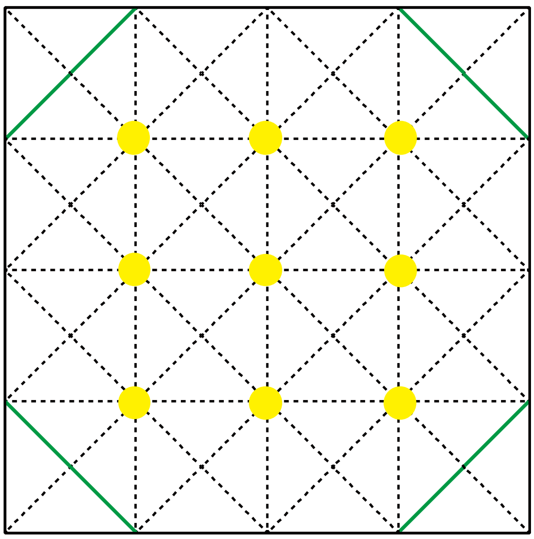


図 3.3　4×4 の 45 度系格子パターンの 8 価頂点と 4 角の折り線。黄色の点が 8 価頂点、緑線は 4 角の折り線

結果

本手法により 4×4 の 45 度系格子パターンに含まれる形式的折り線図は 259,650,300 通りであることが判明した。90 度ごとの回転、及び、反転して重なるものは同一の形式的

折り線図としている。計算時間は、Core i7 @2.00GHz, RAM8GB を搭載した PC で約 5 時間 40 分であった。図 3.4 は折り線数別に見た形式的折り線数のヒストグラムである。折り線数が 0, 1 55, 及び 56 となる形式的折り線図が 1 通りのみ存在することが判明した。また、形式的折り線図数が最も多くなるのは折り線数が 33 の時で 25,566,613 通り存在した。図 3.5 でその一部が示す。

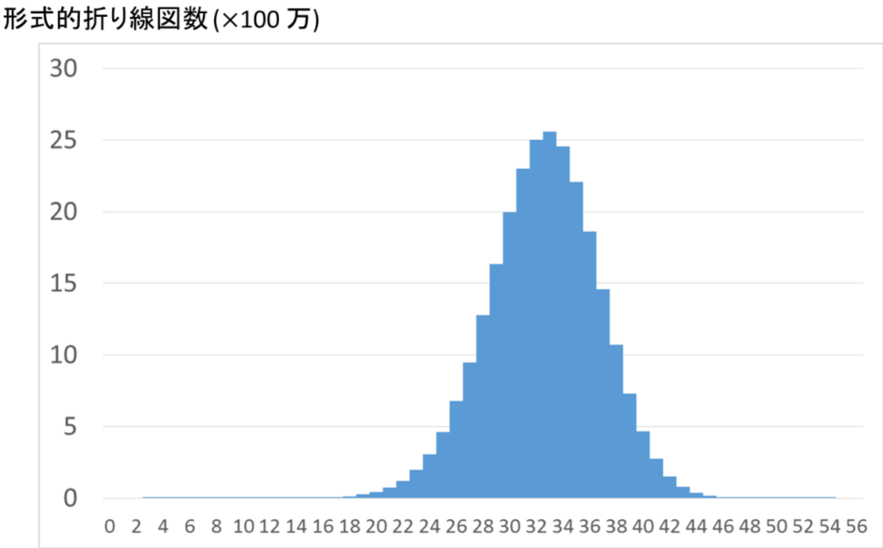


図 3.4　4×4 の 45 度系格子パターンから列挙された形式的折り線図のヒストグラム。縦軸は形式的折り線図数、横軸は折り線数

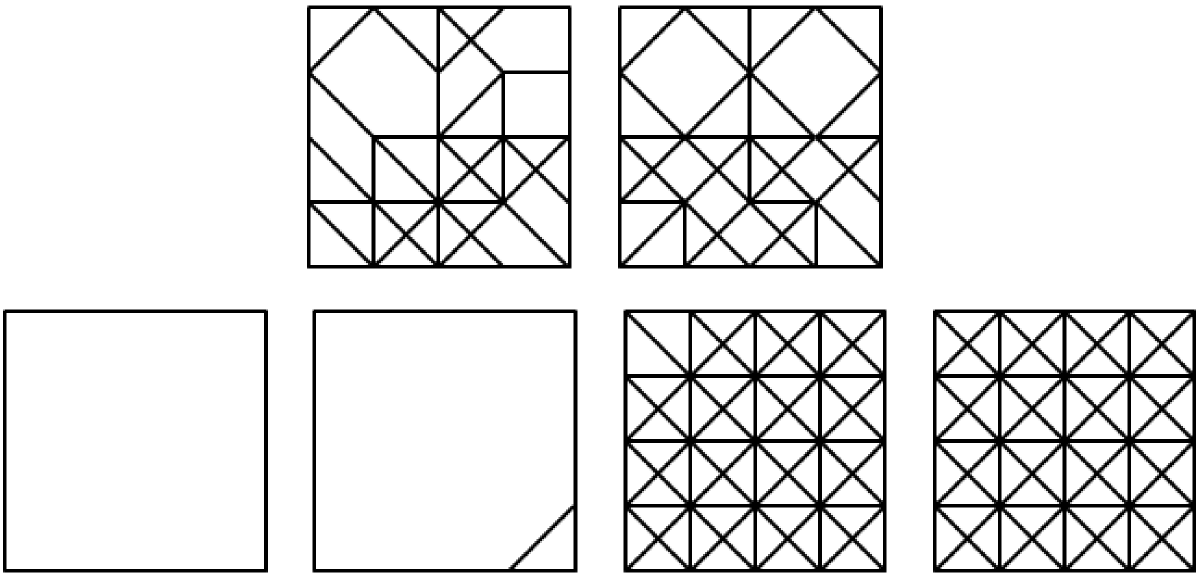


図 3.5　4×4 の 45 度系格子パターンから列挙された形式的折り線図の例。上は折り線数 33 の形式的折り線図の一例。下は左から折り線数 0、1、55、56 の形式的折り線図

3.1.2　平坦折り後の形状の列挙

複数の異なる形式的折り線図は同じ平坦折り形状になる可能性がある。図 3.6 に示されたものはその例である。そこで山本らは列挙した形式的折り線図を平坦折りした結果、何通りの形状が作りだせるかを検証した。図 3.6 の平坦折り後の形状は三谷が開発した ORIPA [36] を用いて算出したものである。山本らは以下の通りに改良した ORIPA を用いて平坦折り後の形状の列挙を行った。形状の列挙においては、平坦折りする際に発生する紙の自己交差は考慮していない。

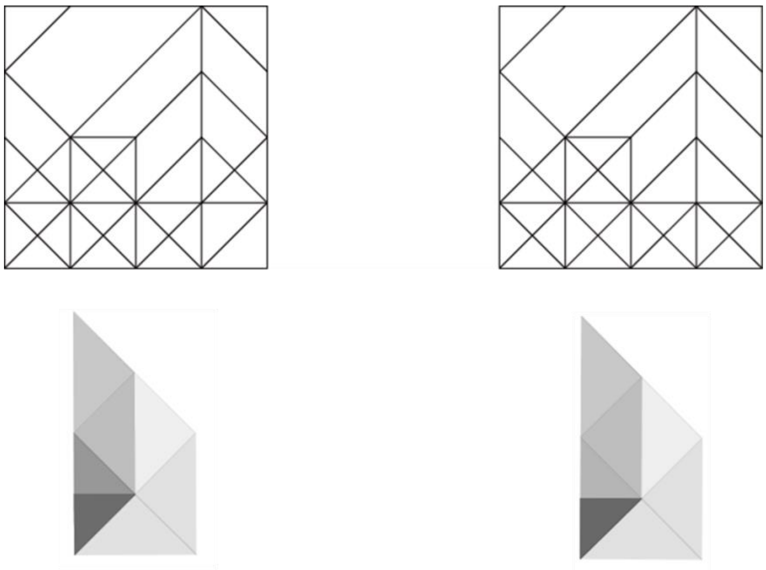


図 3.6　異なる形式的折り線図が同じ形状に折りたたまれる例

数値誤差と ORIPA の改良

ORIPA は与えられた展開図の座標値を小数点で取り扱うことで自由な入力を可能にしているが、形を算出するための幾何計算の際に数値誤差が生じる可能性がある。得られた形状の重複を避けるためには誤差のない正確な比較が必要となる。本研究おいて入力する形式的折り線図は 45 度系格子パターンに含まれるものに限定されるため、座標値を整数型で取り扱うものに ORIPA を改良した。

形状のデータ構造

ORIPA は平坦折り後の形状を描画処理によって出力するため、形状の比較のための記述方法が必要である。本研究で取り扱う平坦折り形状は 45 度系格子パターンに乗る直角二等辺三角形（以後、単位三角形とする）の集合で構成される。4×4 においては 64 個の単位三角形の有無で形状は表現できる。形式的折り線図と同様に 64bit の整数型の値で各形状が表現できる。

結果

本手法により 4×4 の 45 度系格子パターンから作りだせる平坦折り後の形状は 1,3452 通りであることが判明した。回転、反転をして重なるものは同じ形状としている。計算時間は Core i7 @2.40GHz, RAM8GB を搭載した PC で約 67 時間 40 分であった。図 3.7 で示された形状はそれに折りたたまれる形式的折り線図数の上位 5 種である。対応する形式

的折り線図数が最も多い形状については、列挙された形式的折り線図の約 7% に相当する。図 3.8 で示された形状は対応する形式的折り線図が 1 つのみのものの一部であり、そのような形状は 782 種だけ存在することが判明した。

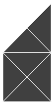
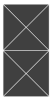
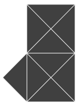
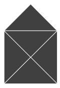
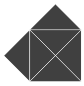
				
17,708,760	15,414,564	14,390,242	13,009,613	12,624,178

図 3.7　折りたたまれる形式的折り線図の数の上位 5 種の形状。下の数字は各々の形状に折りたたまれる形式的折り線図の数

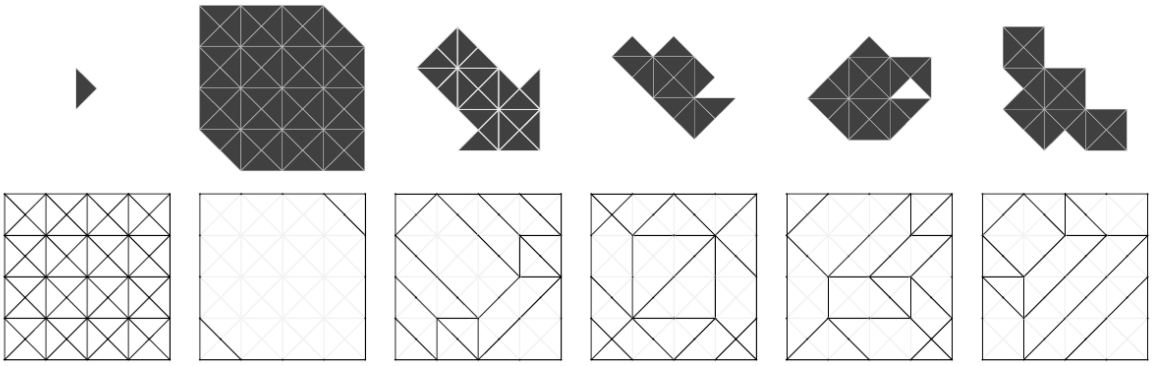


図 3.8　折りたたまれる形式的折り線図が 1 つのみの形状

3.1.3　CP finder

山本らは形状を入力し、その形状に折りたたまれる形式的折り線図を出力するシステム「CP finder」を開発した。図 3.9 で示された CP finder のウィンドウ上の左側に形状を入力すると、それに対応した形式的折り線図の内の 1 つが右側に提示される。入力された形状が 4×4 の 45度系格子パターンから作りだせないのであれば、Not Found と表示される。山本らは本システムを用いて図 3.10 で示されたアルファベットと数字を模した形状を発見した。

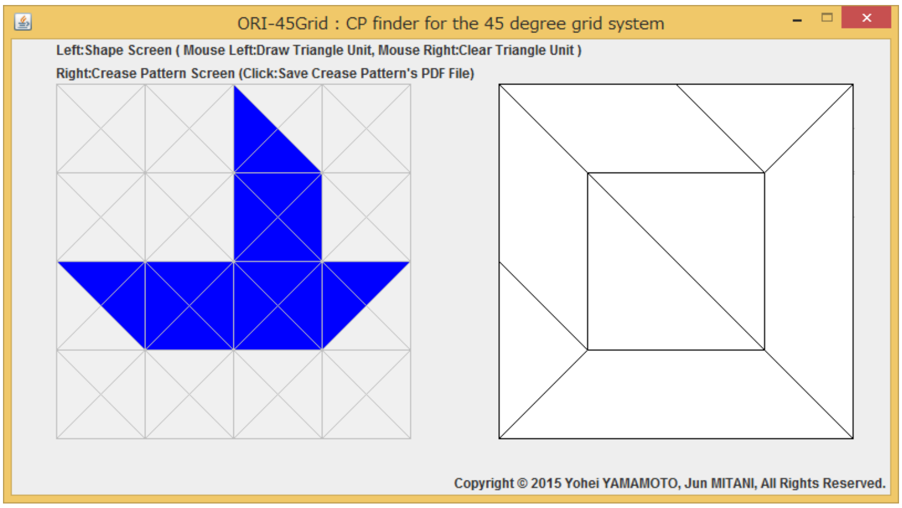


図 3.9　CP finder 実行時のウィンドウ

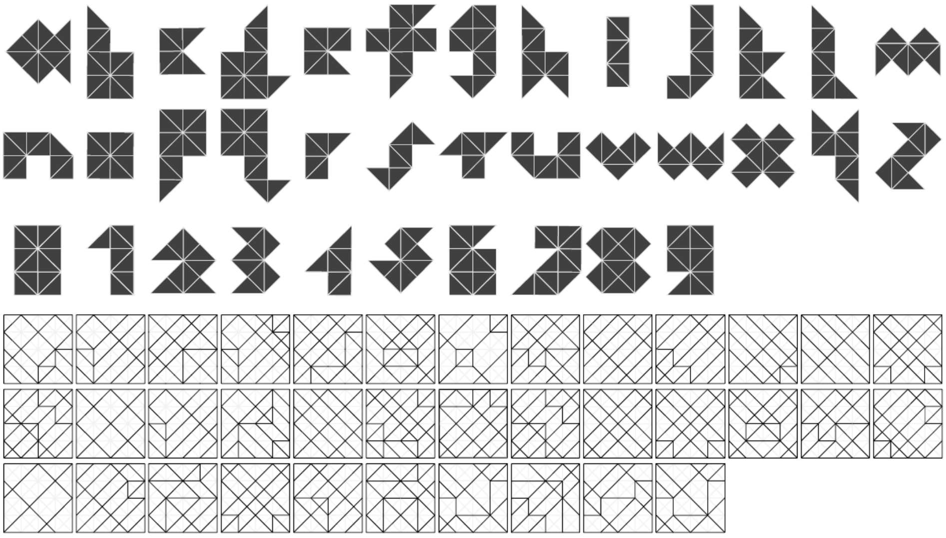


図 3.10　4×4 の 45 度系格子パターンから作りだされるアルファベットと数字を模した形状

3.2　2×2、及び 3×3

4×4 の 45 度系格子パターンよりも含まれる正方形領域の数が少ないものとして、2×2、3×3 のものがある。山本らはそれらに含まれる形式的折り線図とその平坦折り後の形状を列挙していない。また、本研究の過程で 4×4 の形式的折り線図には平坦折りできないものが含まれていることが判明した（詳細は 4.4 節で示す）。そこで、本研究では 45 度系格子パターンに含まれる平坦折りできない形式的折り線図の最も単純なもの（折り線数、頂点数、及び含まれる正方形領域数が最少となるもの）を見つけ出せないか検証するために 2×2、3×3 の形式的折り線図の列挙を行った。

2×2、3×3 の 45 度系格子パターン上に存在する 8 価頂点に局所平坦折り可能条件を満たすパターンを配置するという山本らと同様の手法を用いて、形式的折り線の列挙を行った。また平坦折り後の形状の列挙についても、2×2、3×3 の平坦折り後の形状は 4×4 の格子パターン上に乗るので、64 個の単位三角形領域で形状を表現するという山本らの手法を用いた。

その結果，形式的折り線図と平坦折り後の形の数は、2×2 ではそれぞれ 116、27 通りであり、3×3 ではそれぞれ 58,530、366 であった。それらの形式的折り線図も平坦折り可能である保証はない。2×2、3×3 から得られる形状は全て 4×4 から得られるものに含まれていた。4×4 の格子パターンは 2×2、3×3 の格子パターンを含んでいるためである。

3.3　3×5

日常生活において、身の回りにある紙のほとんどが正方形ではなく、長方形のものである。また、長方形の紙を用いることで折紙作品の幅を広げることもある。多くの人々が作りだした経験のある紙飛行機の多くは長方形の紙を用いる。そこで本研究では、山本らが対象にしていなかった長方形の形式的折り線図の列挙を行った。

本節では 3×5 の 45 度系格子パターンに含まれる形式的折り線図とその平坦折り後の形状の列挙について示す。3×5 に限定した理由は、列挙される形式的折り線図の数が現在の計算機に対応可能な範囲と予想したためであり、更に 4×4 の格子パターンには含まれない形式的折り線図を折りたたむことで、これまで得られなかった形状を得ることができるためである。ちなみに、3×5 の格子パターンは名刺サイズ（5 号）の紙とほぼ同比率である。

3×5 の形式的折り線図の列挙については、山本らの手法を単純に用いるだけでは実現できない。ORIPA は構成面に対して、折り線を軸とした鏡映反転を繰り返すことにより形状を算出するが、3×5 関しては、形式的折り線図から形状をその幾何計算によって算出する際に、形状が形式的折り線図の領域をはみ出してしまうことがある。そこで、本研究では山本らの形状の列挙手法を拡張することで、3×5 から作りだされる形状を列挙する。

3.3.1　3×5 から作りだされる平坦折り後の形状の列挙

ORIPA は形式的折り線図上の構成面に対して、折り線を軸とする鏡映反転によって重ねることで形状を算出するが、3×5 においてその幾何計算を行うことで形式的折り線図の領域をはみ出しまう場合がある。そこで、3×5 の形式的折り線図の平坦折り後の形状は 5×5 の 45 度系格子パターン上の単位三角形領域で表現する（図 3.11）。

3×5 の 45 度系格子パターンの内部には線分は 52 本存在するため、3×5 の形式的折り線図は 64bit の整数型の値で表現できる。しかし、5×5 の 45 度系格子パターン上の単位三角形領域は 100 個存在するため、3×5 から作りだされる形状は 64bit の整数型の値では表現できない。そこで、形状に関しては 128bit の整数型の値で表現する。本研究では、1 つの形状を 2 つの 64bit の整数型の値を用いてデータとして書き出した。

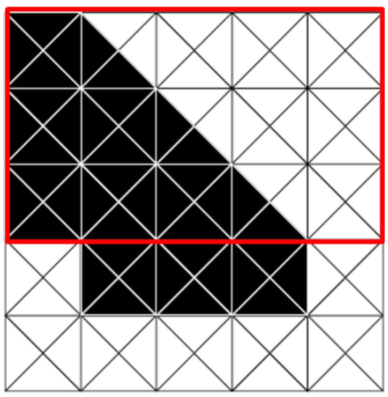


図 3.11　3×5 において、折りたたんだ形状が形式的折り線図の領域をはみ出している様子。形状は 5×5 の格子パターンに収まる赤の枠線が 3×5　の形式的折り線図の領域

3.3.2　結果

3×5 の 45 度系格子パターンに含まれる形式的折り線図とその平坦折り後の形状はそれぞれ 212,030,844 と 18,184 通りであった。4×4 のときの結果と比較すると、3×5 の方が形式的折り線図は少ないのに対し、形状は 3×5 の方が多くなっている。そのことから、長方形の紙の方が正方形のものより豊かな形状の表現が可能であると判断できる。

3.3.3　3×5 版 CP finder

3.2.3 節で紹介されている CP finder を 3×5 に対応したものに改造したシステムを作成した。図 3.12 で示された 3×5 版 CP finder のウィンドウ上の左側に形状を入力すると、それに対応した 3×5 の形式的折り線図の内の 1 つが右側に提示される。入力された形状が 3×5 の 45 度系格子パターンから作りだせないのであれば、Not Found と表示される。本システムを用いて 4×4 の時と同様にアルファベットと数字を模した形状を発見した（図 3.13）。3×5 の 45 度系格子パターンから作りだされる形状からは 4×4 では作りだすことができないものが発見された。例えば、図 3.13 の A や T などが 4×4 からは作りだすことができない。

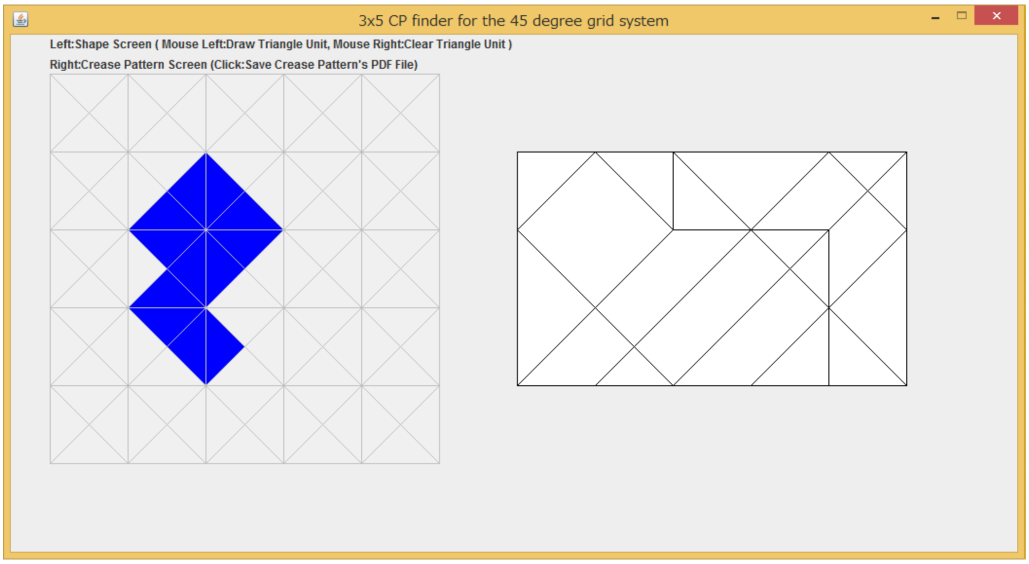


図 3.12　3×5 版 CP finder 実行時のウィンドウ

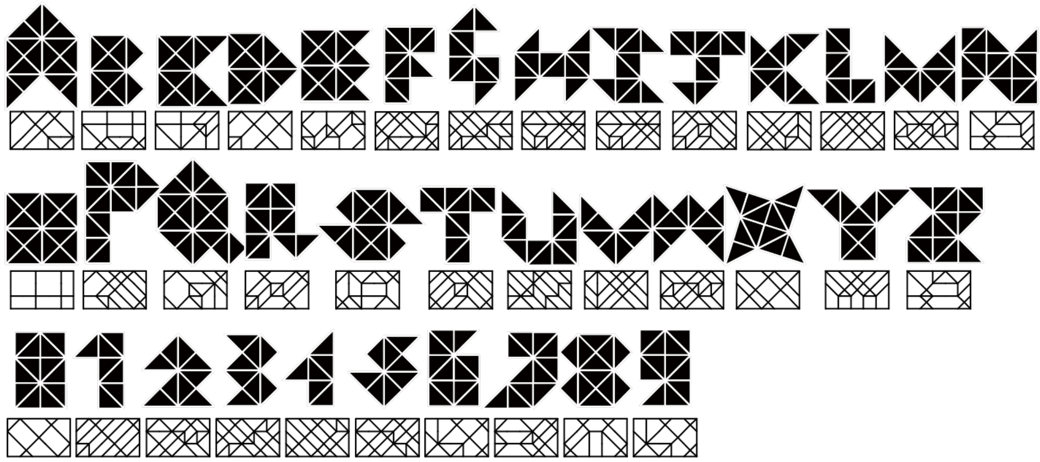


図 3.13　3×5 の 45 度系格子パターンから作りだされるアルファベットと数字を模した形状。4×4 の 45 度系格子パターンから作りだされる形状には存在しない形状が発見できた。例として大文字の A や T など

3.4　ORIGAMI FONT

CP finder によりアルファベットと数字を模した形状が発見された。Demaine らはテキストを入力し、数学的に発見したフォントを表示させる Web アプリケーションを公開している [60]。そこで、Demaine らのものと同様にテキストを入力し、本研究で発見されたフォントを表示させる Web アプリケーション ORIGAMI FONT を開発した [73, 74]。ORIGAMI FONT は Demaine の個人的なホームページでも紹介されている [60]。

ORIGAMI FONT は 4×4、及び 3×5 に対応したものがあり、両者ともテキストを入力すると、アルファベットと数字を模した形状とそれらに対応した山谷付き展開図が表示される。山谷付き展開図のみ、もしくは形状のみ表示させることも可能で、文章を展開図で表現するなどパズルとしての楽しさもある（図 3.14 〜 図 3.17）。

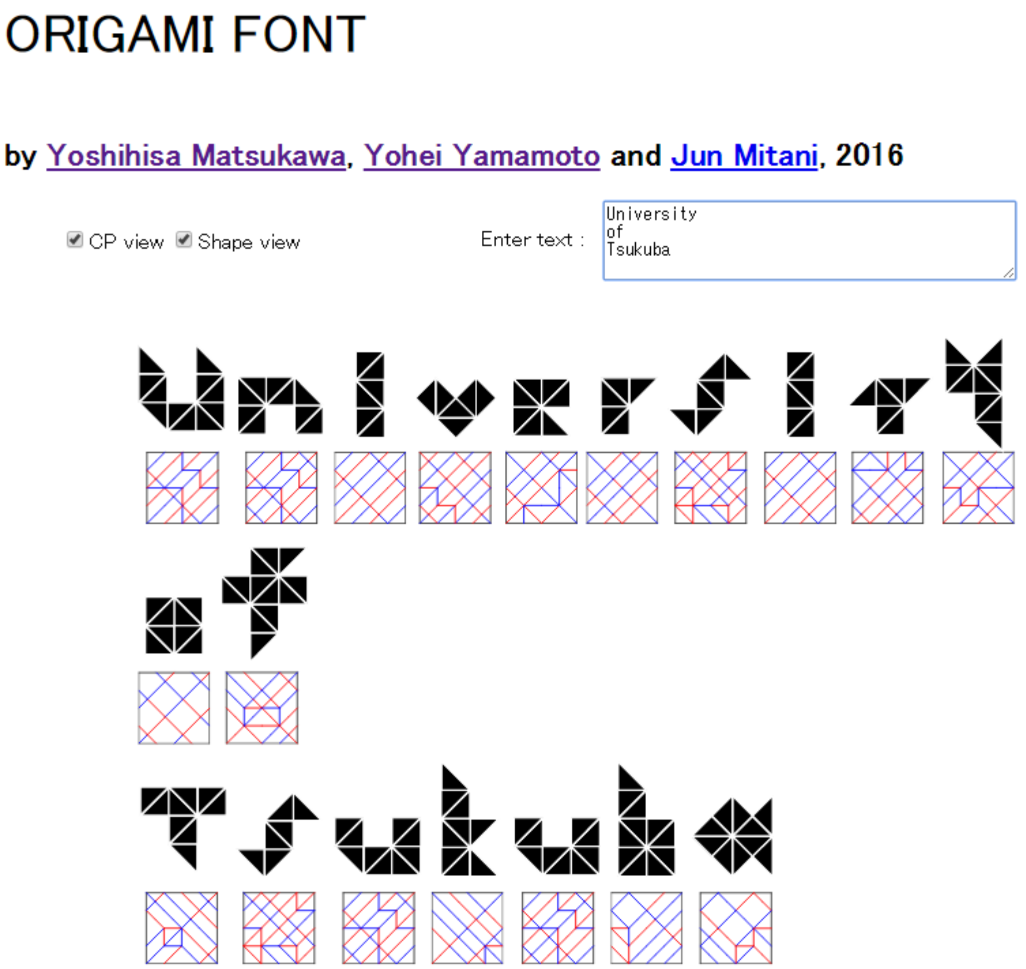


図 3.14　ORIGAMI FONT(4×4) の実行画面。形状と山谷付き展開図を表示

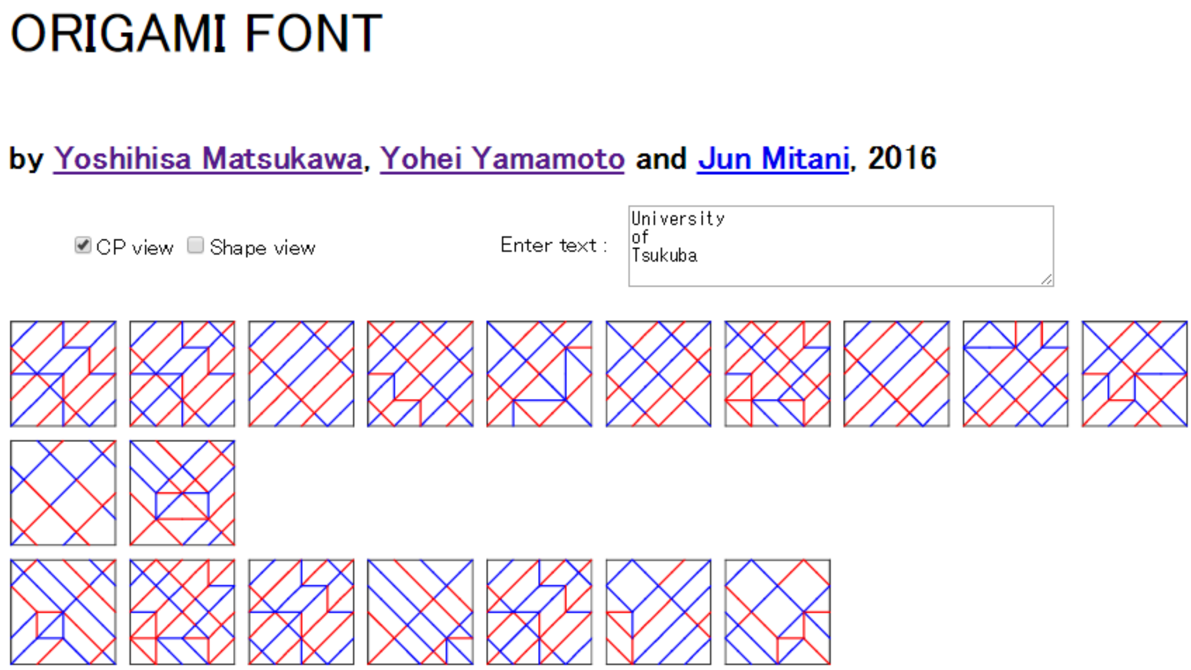


図 3.15　ORIGAMI FONT(4×4) の実行画面。山谷付き展開図のみ表示

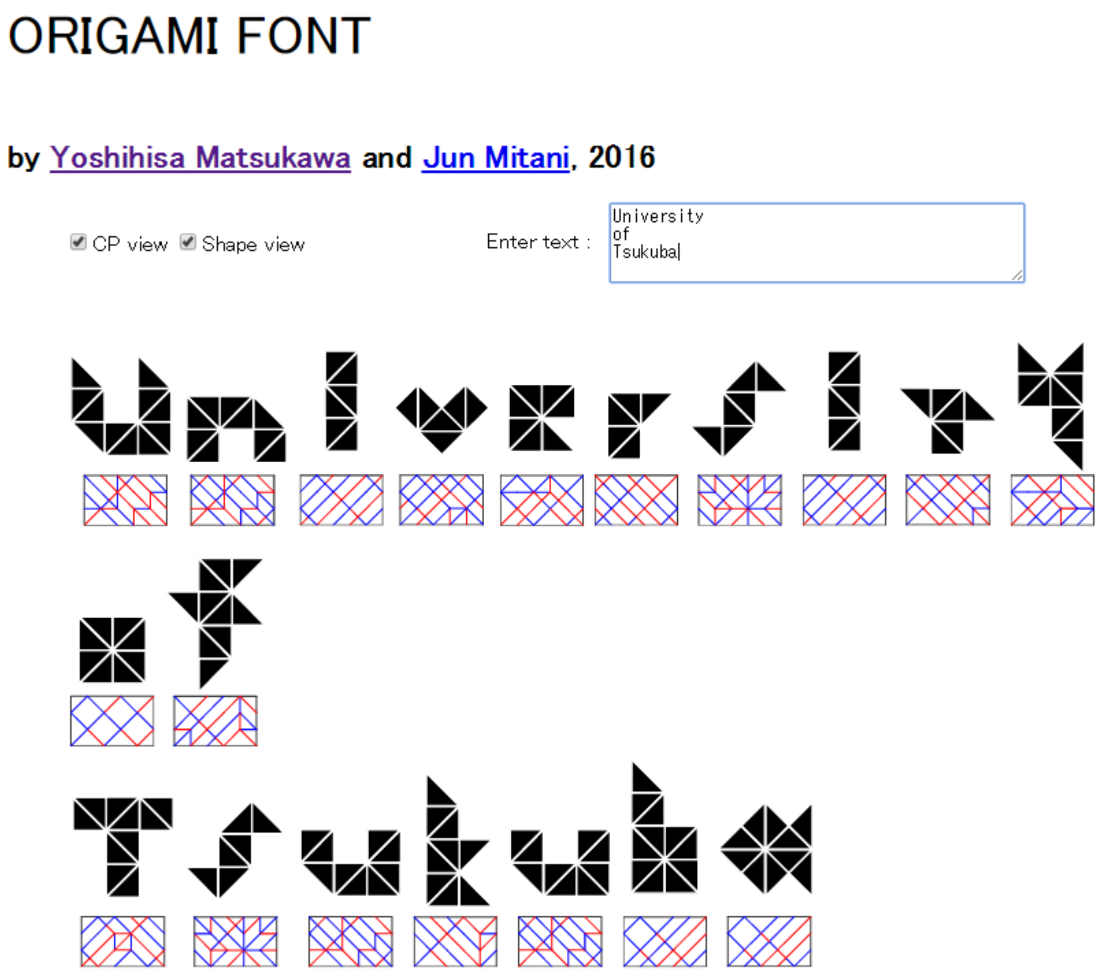


図 3.16　ORIGAMI FONT(3×5）の実行画面。形状と山谷付き展開図を表示

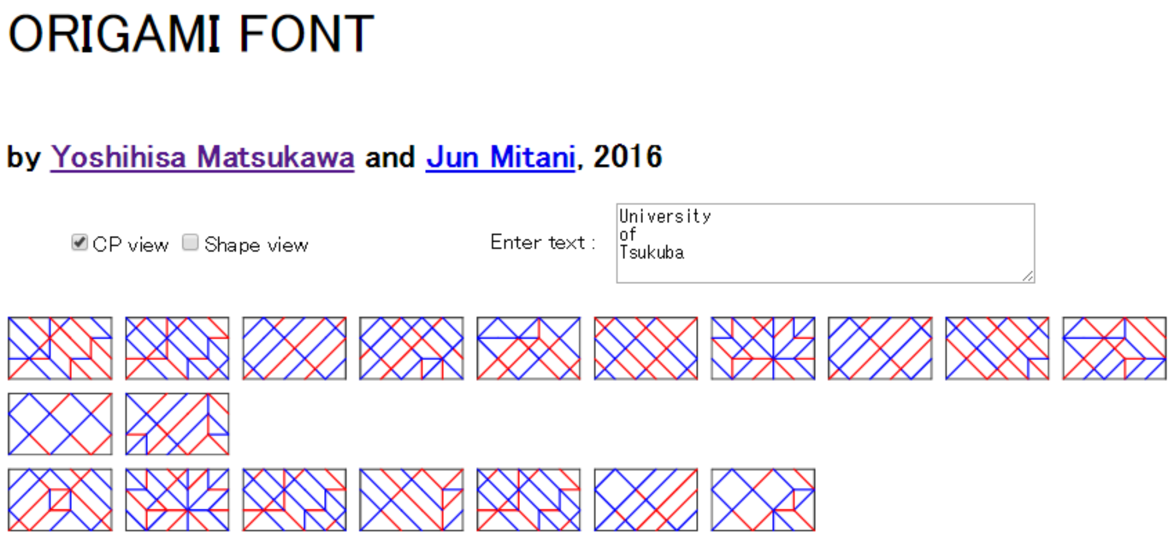


図 3.17　ORIGAMI FONT(3×5）の実行画面。山谷付き展開図のみ表示

3.5 まとめと考察

山本らは 4×4 の 45 度系格子パターンに含まれる形式的折り線図とそれらの平坦折り後の形状を列挙した。本研究では、山本らが列挙していない 2×2、3×3、及び 3×5 の 45 度系格子パターンに含まれる形式的折り線図とそれらの平坦折り後の形状の列挙を行った。列挙された形式的折り線図と平坦折り後の形状の数は表 3.1 に示す。3×5 については、形状を算出するための幾何計算の際に、形状が形式的折り線図の領域をはみ出てしまう問題があったが、本研究でその解決法を提案した。また、本研究では山本らが開発した形状の検索システム CP finder を 3×5 の形状に対応させた 3×5 版 CP finder を開発した。3×5 版 CP finder は入力された形状に折りたたまれる 3×5 の形式的折り線図を出力する。入力された形状が 3×5 の 45 度系格子パターンから作りだせないのであれば、Not Found と表示される。更に 3×5 版 CP finder によってアルファベットと数字を模した形状が発見されたため、テキストを入力し、その文字列に対応した形状が出力される Web アプリケーション ORIGAMI FONT を開発した。ORIGAMI FONT は山谷付き展開図のみを表示することが可能であるので、文字を展開図で表現するというパズル的な楽しさがある。ORIGAMI FONT については山本らが発見した 4×4 の形状と本研究で発見した 3×5 の形状それぞれに対応したものを開発した。

これまでの多くの折り紙の形状の提示に関する研究は、理論的な設計手法を提案し、目的の形状を設計するというアプローチをとっていた。しかし、鶴田らによって、理論的な設計手法ではなく計算機の性能を利用した、形状を列挙するという新しいアプローチが提案された [9, 1]。本研究も 45 度系格子パターンから作りだされる形状の列挙を行った。鶴田らは、折り回数と折り方を限定し、現実的な時間内で解決可能な問題を設定した。本研究でもあらゆる形式的折り線図から作りだされる形状の列挙は現実的ではないので、45 度系格子パターンに限定した。本研究では 3×5 版 CP finder を開発し、鶴田らは輪郭を入力することで類似した形状を検索するシステムを開発したが、それらより理論的な設計ではなく形状の列挙という手法であっても、検索するシステムを実装すれば、これまでに発見されていなかった折り紙作品をユーザに提示することが可能であることがわかった。例えば本研究では、アルファベットと数字を模した形状を見つけ出した。折り紙の形状の列挙に関する研究は、まだ数が少ない。特定の手段から得られる形状の列挙を行えば、もっと多くのまだ発見されていない形状を見つけ出すことが可能であると考えられる。

表 3.1 提案手法によって列挙された 形式的折り線図とそれらの平坦折り後の形状それぞれの数

格子パターンのサイズ	形式的折り線図数	平坦折り後の形状数
2×2	116	27
3×3	58,530	366
4×4（山本らによる）	259,650,300	13,452
3×5	212,030,844	18,184

第4章　平坦折り後の形状の実現可能性

第 3 章で紹介された手法で列挙された形式的折り線図は局所平坦折り可能であるが、平坦折り可能である保証はない。よって、第 3 章で列挙された平坦折り後の形状は実際には作りだせない可能性がある。本章では、それらの平坦折り後の形状が実現可能であるか検証することを目的とし、それらに折りたたまれる形式的折り線図の平坦折り可能性の評価手法について示す。

4.1 節では形式的折り線図の平坦折り可能性の評価方法を示す。形式的折り線図が平坦折りできない理由は大きく分けて 2 つあるが、どちらも平坦折りできない原因は紙の交差に帰着するため、紙の交差が発生しない構成面の重なり順序を探索することで、平坦折り可能性を評価する。4.2 節は形状が実現できるかの検証方法とその結果を示す。形式的折り線図の平坦折り可能性の評価は NP 困難であることが知られており、効率的なアルゴリズムは存在しないため、形状が実現可能か検証するには工夫が必要である。4.3 節では、紙の表裏を考慮した実現可能な形状の検索するシステムについて示す。折り紙作品には紙の表裏の色の違いを利用したものがあるため、そのような折り紙作品を 45 度系格子パターンから作りだせないか検証した。

本研究の平坦折り後の形状の実現可能性の評価実験の過程で、平坦折りできない形式的折り線図が発見された。形式的折り線図が平坦折りできない理由の 1 つに、平坦折り可能な山谷割当を持つが折りたたむ際にな紙の自己交差が生じるため平坦折りできないというものがある。45 度系格子パターンに含まれる形式的折り線図で、その理由によって平坦折りできないものは未だ発見されていないため、本研究ではそのような形式的折り線図が列挙したもののなかに含まれていないか調査した。そして、4.4 節では、形式的折り線図の平坦折り可能性の評価手法により発見された平坦折りできないものについて示す。節 4.5 では、まとめと考察について示す。

4.1　形式的折り線図の平坦折り可能性の評価

4.1.1　平坦折りできない理由

図 4.1 と図 4.2 は平坦折りできない形式的折り線図である（再掲)。図 4.2 については 45 度系格子パターンに含まれるものである。形式的折り線図が平坦折りできない理由は、以下の 2 つに大別されるが、いずれの理由も紙の自己交差に帰着する。

(a) 平坦折り可能な山谷割当を持たない

(b) 平坦折り可能な山谷割当を持つが折りたたむ際に紙の自己交差が生じる

(a) は、形式的折り線図の内部に存在する全ての頂点に矛盾なく局所平坦折り可能条件を満たす山谷割当ができない状態である。(b) は全ての頂点に対して矛盾なく局所平坦折り可能条件を満たす山谷割当が可能であるが、折りたたむ際に紙が衝突してしまい、折りたたむことができない。

図 4.1 の左の形式的折り線図は平坦折り可能な山谷割当を持たないため折りたたむことができない。大小大定理により、川崎定理を満たす 1 頂点について、大きな角、小さな角、

大きな角の順に隣り合っているとすると、それらの間の折り線の山谷は異ならなければ、平坦折りできない。したがって、図 4.1 の左の形式的折り線図の中央の三角形の辺は山折りと谷折りが交互になる必要があるが、それは不可能である。よって、図 4.1 の左の形式的折り線図は（a）の理由で平坦折りできない。図 4.1 の右については（b）の理由で平坦折りできない。図 4.2 で示された形式的折り線図はいずれも（a）の理由で平坦折りできない。図 4.2 で示された形式的折り線図より構成される正方形の数が少ない平坦折りできないものは、45 度系格子パターンにおいては著者らが知る限りではまだ発見されていない。

局所的には平坦折り可能であるが、大域的には平坦折りできない展開図を発見するのは困難である。(a) の理由で平坦折りできないものについては、大小大定理を用いれば折りたためない理由が説明できるが、(b) の理由で折りたためないと説明するための単純な理論は存在しないため、折りたためないと判定するのは困難である。文献 [21] によると、Hull は講座で学生たちに平坦折りできない展開図を考えさせている。図 4.1 の左の形式的折り線図に近いものを作りだした学生もいたが、平坦折りできないものではなかったようだ。

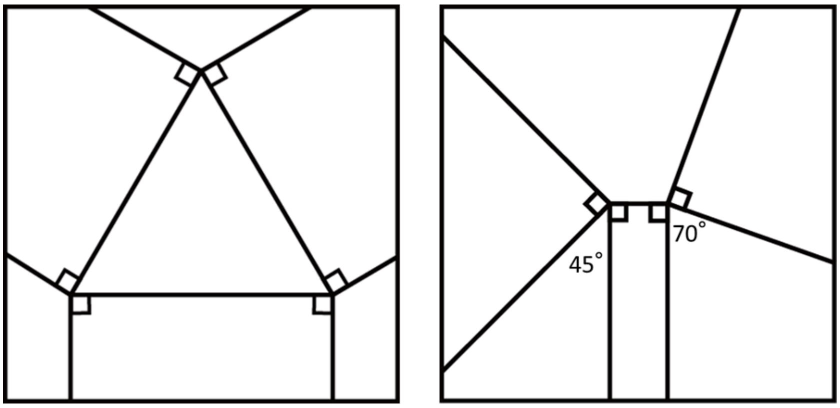


図 4.1 Hull によって示された平坦折りできない形式的折り線図。左は平坦折り可能な山谷割当を持たない。右は平坦折り可能な山谷割当を持つ（再掲）

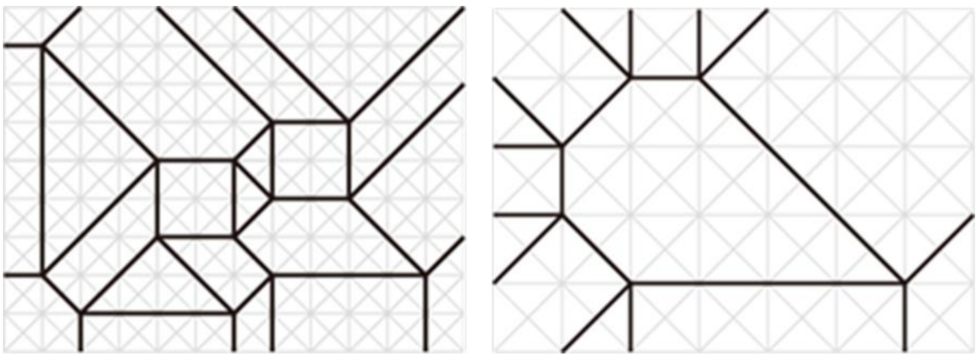


図 4.2 45 度系格子パターンに含まれる平坦折り可能な山谷割当を持たない形式的折り線図。左は川崎、右は舘による（再掲）

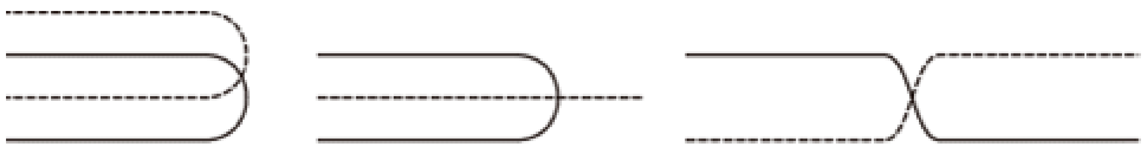
4.1.2 平坦折り可能性の評価手法

平坦折り後の形は 45 度系格子パターンに乗る単位三角形領域から構成される（3.1.2 節の「形状のデータ構造」より）。与えられた形式的折り線図が平坦折り可能であるには。折り線を境界辺とする鏡映反転によって形状を算出した後、形状を構成する単位三角形領域ごとの

構成面の重なり順序に交差が生じないものがあればよい。

図 4.3 の (1)、(2) は単位三角形ごとの構成面の重なり順序を決定する際に、領域境界で交差が生じてしまうケースである。(1) の重なり順序では、2 つの互いに上下で接続する構成面の組が互い違いになる。(2) の重なり順序では、互いに上下で接続する 2 つの構成面の間を別の構成面が横切る。(3) は複数の異なる単位三角形領域間で重なり順序の矛盾が生じるケースである。

各単位三角形領域での交差のない重なり順序を深さ優先探索で決定し、複数の単位三角形領域間での整合性が満たされない場合はバックトラックを行うことで、全体で整合性のある構成面の重なり順序を決定する。



(1) (2) (3)

図 4.3 単位三角形領域境界で交差が生じるケース（(1)、(2))。複数の単位三角形領域間で矛盾が生じるケース（(3)。

4.1.3 平坦折りできない形式的折り線図の山谷割り当ての可能性

平坦折りできない形式的折り線図は平坦折り可能な山谷割当を持たないものと紙の自己交差が生じるものの 2 つに大別される。これらの形式的折り線図は平坦折りできない理由としては紙の自己交差に帰着するが、その交差の性質は異なる。項 4.1.2 の手法は紙が自己交差するか否かを判定するものであるため、平坦折りできない理由までは判別できない。そこで本節では、平坦折りできない形式的折り線図が平坦折り可能な山谷割当を持つか否かを判定する手法を提案する。

8 価頂点における 1 頂点平坦折り可能な 36 パターンに対して、局所平坦折り可能条件を満たす山谷を割り当てたデータを作る。そして、ある形式的折り線図に含まれる全ての頂点に対して、左上から右下の順番に、作ったデータを参照しながら、局所平坦折り可能である山谷割当パターンを当てはめていく。深さ優先探索で進め、複数の頂点間で矛盾が生じた場合は、バックトラックを行う。全体を通して矛盾の無い山谷の割り当てができない場合には、平坦折り可能な山谷割当を持たない。そうでない場合には紙の自己交差が原因で折りたためられないと判定できる。

4.2 平坦折り後の形状の実現可能性の評価実験

4.2.1 実験方法

たとえ 45 度系格子パターンに含まれるものであっても、与えられた形式的折り線図の平坦折り可能か否かの判定は NP 困難であるため、その効率的なアルゴリズムは存在しない。本章での目的は第 3 章で列挙された平坦折り後の形状が実現可能であるかを確認することである。そこで、第 3 章で列挙された形式的折り線図全ての平坦折り可能性を評価するのではなく、各形状についてその形状に折りたたまれる形式的折り線図の内 1 つでも平坦折

り可能なものが存在するのかを確認する。また、平坦折り可能性の評価をする形式的折り線図は折り線数が少ないものを選出する。

4.2.2　結果

本手法により第 3 章で列挙された平坦折り後の形状は実現可能であることが確認できた。4× 4 については Java を用いて、Intel Core i7-3537u 2.00GHz RAM 8GB を搭載した PC 上で動作させたところ全体の計算時間は 1807 秒であった。形状の実現可能性の評価実験の過程で平坦折りできない形式的折り線図が発見された（図 4.4)。

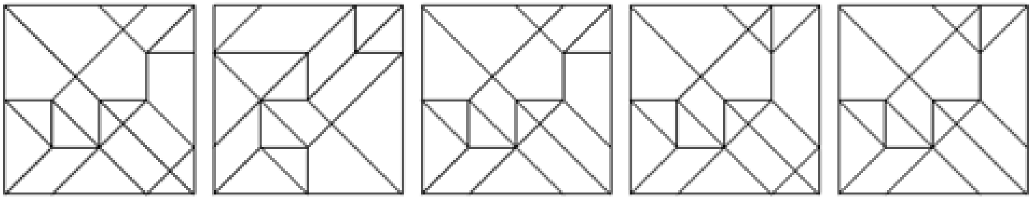


図 4.4　平坦折り後の形状の実現化可能性の評価実験の過程で発見された平坦折りできない形式的折り線図

4.3　紙の表裏を考慮した形状の検索

折り紙作品には紙の表裏の色の違いを利用した作品がよく見られる。また、アルファベットや数字を模した形状を一般的に折り紙制作で用いられる表裏で色の違う紙で作りだしたとき、完成作品の全体の色が統一されていた方が見栄えが良い。そこで、本研究では紙の表裏を考慮した形状の検索システムを実装した。

図 4.5 で示された検索システムのウィンドウ上の右側に表面の紙の表裏を考慮した形状を入力すると、左側にはその形状に折りたたまれる山谷付き展開図が出力される。ORIPA によって算出された形状は、反転した構成面とそうでないものが重なり合って外形を構成する。反転した構成面を裏返った紙の面とし、ユーザが入力した表裏を考慮した形状が実現できる構成面の重なり方は存在するか探索する。他の構成面が上に重なって隠れてしまう構成面は考慮しておらず、形状の表面のみを見て、同じ模様になる構成面の重なり方を探す。ユーザが入力した外形と紙の表裏による模様が列挙された形式的折り線図では実現できない場合は、Not Found とシステムのウィンドウ上の左側に表示される。

図 4.6 で示されている山谷付き展開図は、山本らが発見した 4×4 から作り出されるアルファベットと数字を模した形状について表面の紙の表裏が統一されるように平坦折りされるものである。図 4.6 の山谷付き展開図は構成面の重なり順序によっては、表面の紙の表裏が統一されないため、本システムではそのように折りたたむための構成面の重なり順序を出力する機能を実装した。図 4.5 のウィンドウ上の左側に山谷付き展開図が表示された後、export PDF をクリックすると PDF 形式で重なり順序が記載された画像が保存される（図 4.7)。図 4.7 で示された平坦折り後の形状は ORIPA によって描画されたものであり、紙の表裏で色を塗り分けているが、平坦折り後の形状の裏面は紙の表裏は統一されていない。

入力された表面の紙の表裏を考慮した形状によっては、それに折りたたまれる山谷付き展開図を出力するための計算時間がかかってしまう場合がある。例えばよって、図 4.6 で示さ

れているアルファベットの「c」の山谷付き展開図を算出するために要した時間は 500 秒であった。また、「t」と「7」の山谷付き展開図の算出はそれぞれ 157 秒と 213 秒であった。そのほかの図 4.6 で示された展開図の多くは 30 秒未満で算出された。

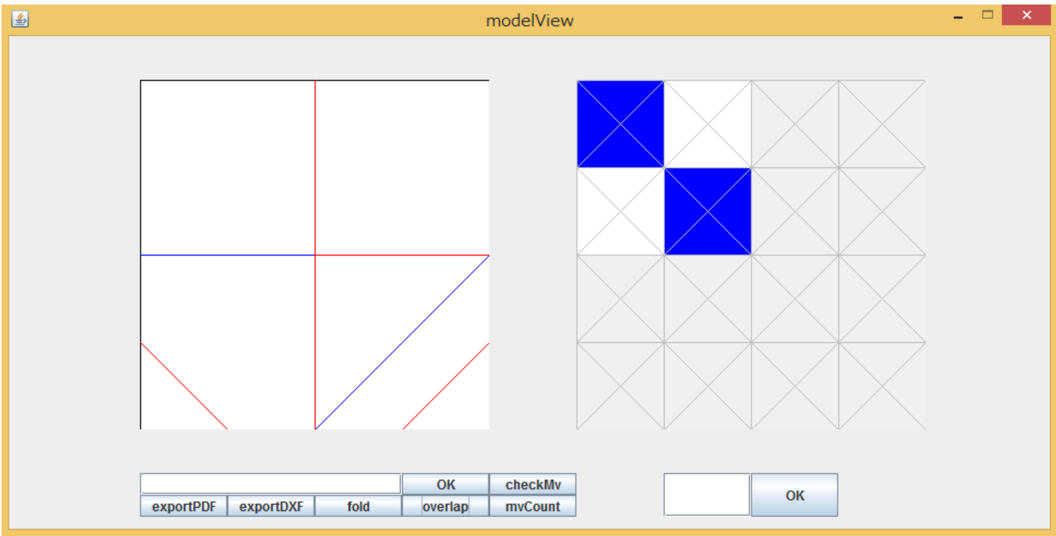


図 4.5　紙の表裏を考慮した実現できる形状の検索システムの実行時のウィンドウ

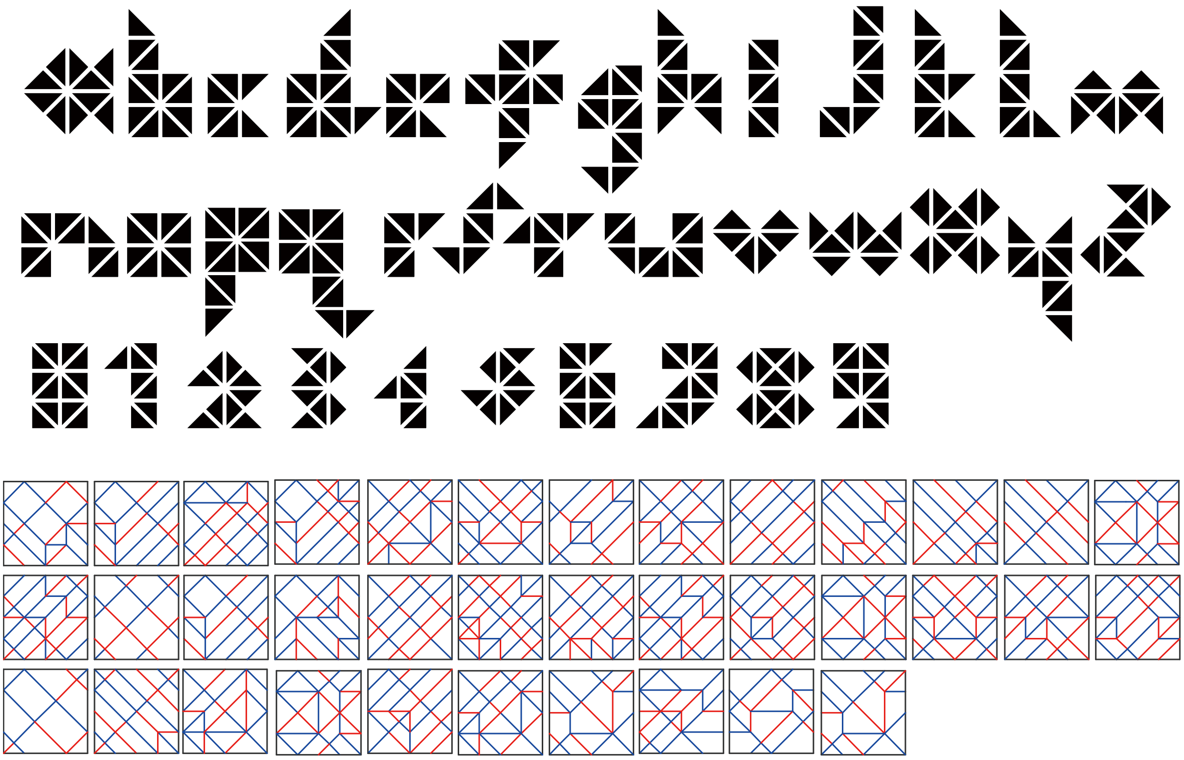
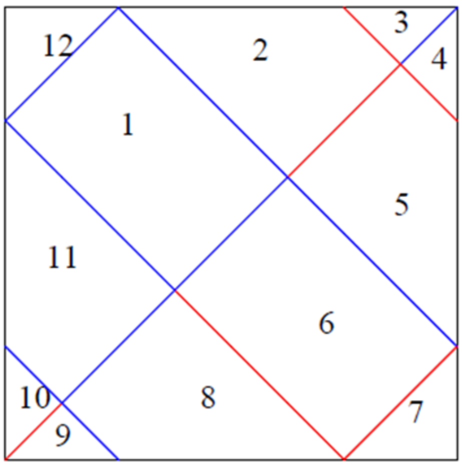


図 4.6　4×4 から作り出されるアルファベットと数字を模した形状（上）と表面の紙の表裏が統一されるように平坦折りされる山谷付き展開図（下）。赤線を山折り、青線を谷折りとすると形状の表面は紙の裏で統一される



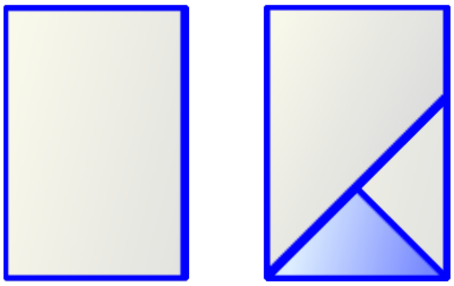


図 4.7 紙の表裏を考慮した検索システムによって出力された構成面の重なり順序が記載された山谷付き展開図（左）と、その重なり順序に従って平坦折りした結果の形状とそれを裏返したもの（右）。左の展開図は上に位置するものから数字が割り当てられている。また、赤線を山折り、青線を谷折りとしている

4.4　平坦折りできない形式的折り線図

平坦折り後の形状の実現可能性の評価実験の過程で、平坦折りできない形式的折り線図が発見された。そこで、形状の実現可能性の評価とは別に、折り線数が少ないものから順に平坦折り可能性を評価した。4×4 では、折り線数 20 まで調べたところ、4000 通り以上の平坦折りできない形式的折り線図が発見された。表 4.1 に折り線数別に見た、平坦折りできない形式的折り線図の数が示す。紙が自己交差をするためにはある程度大きい構成面が必要である。表 4.1 では折り線数が増えると平坦折りできない形式的折り線図の割合が増えていくが、折り線数が増えれば構成面は小さくなるため、一定の折り線数を超えると平坦折りできない形式的折り線図の割合が減少していくと予想できる。

本研究では、45 度系格子パターンに含まれる正方形領域の数が最も少ない形式的折り線図を最小なものと呼ぶことにし、内部に含まれる折り線数と頂点数の少ないものを単純な形式的折り線図とすると、45 度系格子パターンに含まれる最小かつ最も単純な形式的折り線図を特定した。以下に、それらの形式的折り線図とそれらを特定した過程を示す。

4.4.1　最小かつ最も単純な平坦折りできない形式的折り線図

4×4 については、折り線数が少ない形式的折り線図から平坦折り可能性の評価をしたところ、折り線数 16 の時に初めて平坦折りできないものが発見された。平坦折り可能性の判定は折り線数が 20 の時まで行った。表 4.1 に各々の折り線数で発見された平坦折りできない形式的折り線図の数を示す。表 4.1 より 4×4 の 45 度系格子パターンに含まれる平坦折りできない形式的折り線図の中で最も折り線数が少ないものは 4 通り存在し、その折り線数は 16 であることが判明した。図 4.8 に 4×4 において折り線数が最少となる平坦折りできない形式的折り線図を示す。

2×2 については、全ての形式的折り線図に対して平坦折り可能性の評価を行ったところ、平坦折りできない形式的折り線図は見出されなかった。つまり、2×2 の 45 度系格子パターンに含まれる形式的折り線図は全て平坦折り可能であった。3×3 ついても全ての形式的折り線図の平坦折り可能性を評価したところ 10 通りの平坦折りできないものが発見された（図 4.9）。

図 4.10 の 2 つの形式的折り線図は 3×3 の 45 度系格子パターンに含まれる平坦折りできない形式的折り線図の中で最も折り線数が少ないものであり、その折り線数は 12 である。図 4.10 の左の形式的折り線図は局所平坦折り可能な山谷割当を持つが折りたたむ際に紙の自己交差が生じるため平坦折りできない。図 4.10 の右は平坦折り可能な山谷割当を持たない。

2×2 において平坦折りできない形式的折り線図は存在しないため 図 4.10 の 2 つは 45 度系格子パターンにおいて最小かつ最も折り線数が少ない平坦折りできないものであると予想することができる。そこで、2×3、2×4 に含まれる形式的折り線図を全て列挙し、それらの平坦折り可能性を評価した。その結果、2×3、2×4 には平坦折りできない形式的折り線図は見出されなかった。したがって、構成する正方形の領域の数が 3×3 の形式的折り線図より少ないものには、平坦折りできないものは存在しない（存在しているならば、2×2、 2×3、及び 2×4 に平坦折りできないものが含まれていなければならない）。よって、図 4.10 の 2 つの形式的折り線図は 45 度系格子パターンにおいて最小かつ最も折り線が少ない平坦折りできない形式的折り線図である。

展開図の単純さの指標として、頂点数を用いることができる。そこで、頂点数が少ない形

式的折り線図を単純なものとして考える。図 4.10 の 2 つの形式的折り線図は 45 度系格子パターンにおいて最小でありながら、最も折り線数が少ない。更に頂点数をその形式的折り線図の単純さの指標として取り入れたら、図 4.10 左の形式的折り線図が最小かつ最も単純な平坦折りできない形式的折り線図である。

表 4.1　4×4 における折り線数別の平坦折りできない形式的折り線図数。括弧内の数字はその折り線数における列挙された形式的折り線図数

折り線数	平坦折りできない形式的折り線図数 (形式的折り線図数)
16	4(41,117)
17	20(75,904)
18	72(139,330)
19	203(248,345)
20	510(434,676)
21	1078(738,404)
22	2158(1,223,923)

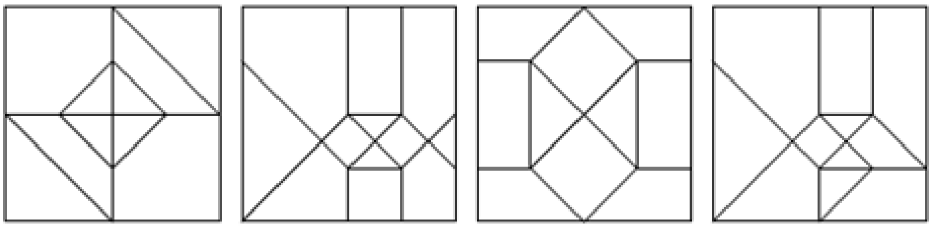


図 4.8　4×4 の 45 度系格子パターンに含まれる平坦折りできない形式的折り線図の中で最小かつ折り線数が最少になるもの

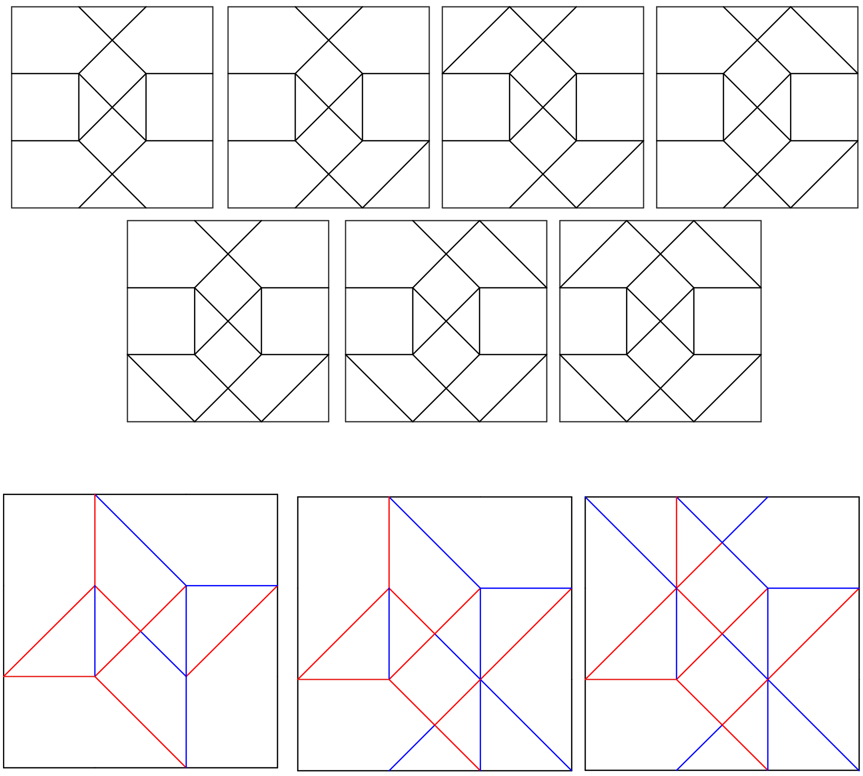


図 4.9　3×3 の 45 度系格子パターンに含まれる平坦折りできない形式的折り線図。上の 7 つは平坦折り可能な山谷割当を持たない。下の 3 つは平坦折り可能な山谷割当を持つ

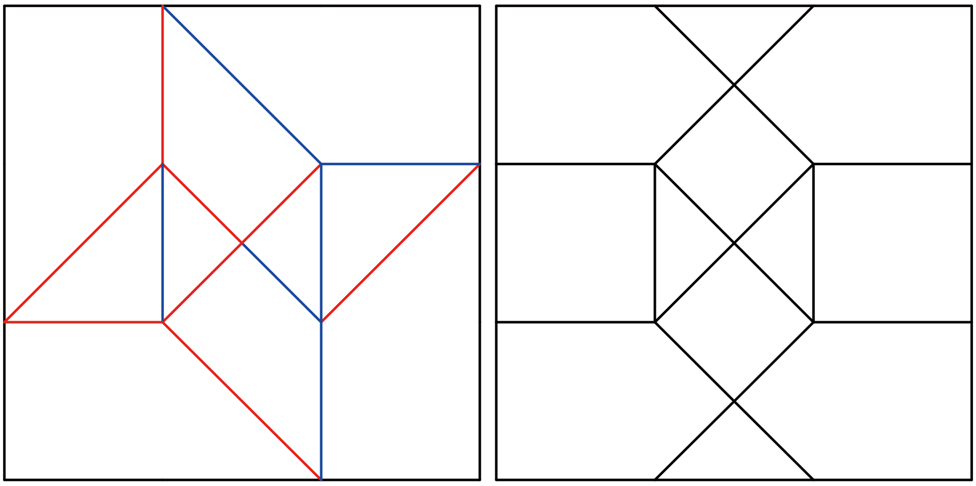


図 4.10　45 度系格子パターンにおけて最小かつ折り線数が最少となる平坦折りできない形式的折り線図。左は平坦折り可能な山谷割当を持つが、右は持たない。さらに左は、45 度系格子パターンにおいて最も単純な平坦折りできないものでもある。

4.4.2　発見された平坦折りできない形式的折り線図の山谷割当可能性

本研究で発見された平坦折りできない形式的折り線図が、平坦折り可能な山谷割当を持つか検証した。表 4.2 に 4×4 について、各々の折り線数における平坦折り可能山谷割当を持たない形式的折り線図の数を示す。3×3 については、58,530 通りの形式的折り線図全てに対して平坦折り可能性を評価したところ、10 通りの平坦折りできない形式的折り線図が発見され、そのうち 7 通りが平坦折り可能な山谷割当を持たないものであった。

形式的折り線図は局所平坦折り可能条件を満たすように山谷を割り当てても折りたためない場合がある。45 度系格子パターン含まれる形式的折り線図において、局所平坦折り可能条件を満たように山谷が与えられているが、折る際に紙の自己交差が生じて平坦折りできないものを Hull が文献 [30] で示している。その山谷付き展開図を図 4.12 で示す。

平坦折り可能な山谷割当を持つが折る際の紙の自己交差によって折りたためない形式的折り線図はどのように山谷を割り当てても平坦折りできない。図 4.10 の左の形式的折り線図は山谷割当が可能であるが、山谷逆転、回転反転をすると同じ割当になるものを除外すると平坦折り可能な山谷割当の数は、 16 通りであった（図 4.11）。しかし、図 4.10 の左の形式的折り線図は平坦折り可能な山谷割当を複数持っていながら、どのように割り当てても平坦折りできない。

表 4.2　4×4 における折り線数別の平坦折り可能な山谷割当を持たない形式的折り線図数。括弧内の数字はその折り線数における平坦折りできない形式的折り線図数

折り線数	山谷割当不可能な形式的折り線図数 （平坦折りできない形式的折り線図数）
16	2(4)
17	6(20)
18	28(72)
19	82(203)
20	214(510)
21	485(1078)
22	987(2158)

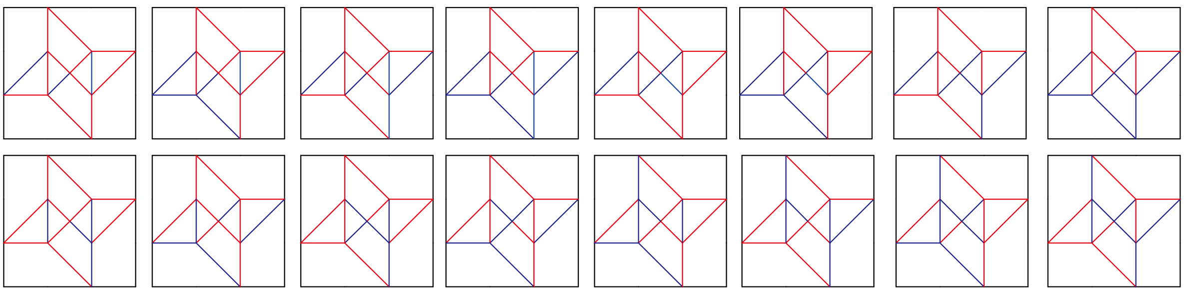


図 4.11　図 4.10 の左の形式的折り線図が持つ 16 通りの平坦折り可能な山谷割当。山谷逆転、回転反転をすると同じ割当になるものを除外している

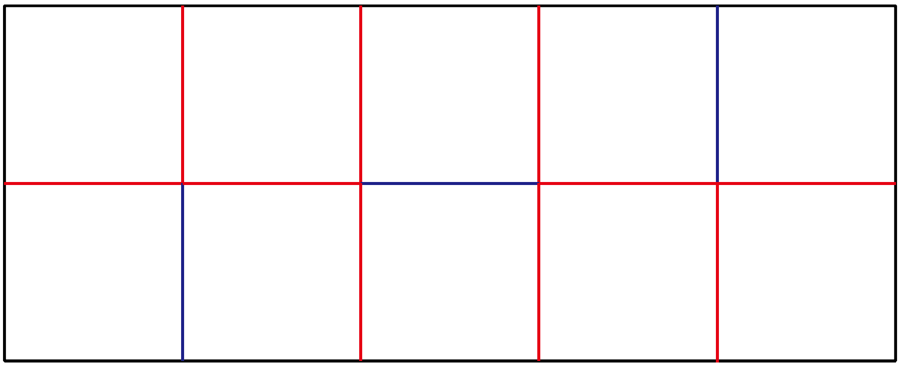


図 4.12　Hull によって示された 2×5 の格子パターンに含まれる平坦折りできない山谷付き展開図

4.5　まとめと考察

本章で提案された形式的折り線図の平坦折り可能性の評価手法により、4×4 の 45 度系格子パターンから作りだされる平坦折り後の形状が全て実現可能であることが確認された。また、2×2、3×3、及び 3×5 の 45 度系格子パターンから作りだされる平坦折り後の形状についても、全て実現可能であることが確認された。また、形状の実現可能性の評価実験の過程で平坦折りできない形式的折り線図が発見された。更に、本研究により、45 度系格子パターンに含まれる最小（正方形領域の数が最も少ない）かつ折り線数が最も少ない平坦折りできない形式的折り線図が 2 つ存在することが判明した（図 4.10）。図 4.10 の左は平坦折り可能な山谷割当を持つものであり、図 4.10 の右は平坦折り可能な山谷割当を持たないものである。単純な形式的折り線図を折り線数と頂点数が少ないものとすると、図 4.10 の左の形式的折り線図は最小かつ最も単純な平坦折りできないものとなる。

形式的折り線図が平坦折り可能な山谷割当を持つかの判定は多項式時間で判定できる [21]。しかし、平坦折り可能な山谷割当を持つが折る際の紙の自己交差によって平坦折りできないものについては、それを判定する効率的なアルゴリズムは存在しない。よって、平坦折り可能な山谷割当を持つが平坦折りできない形式的折り線図を発見することは困難であると考えられる。また、図 4.10 の左の形式的折り線図は図 4.1 の形式的折り線図とは異なり、折り線のなす角度が 45 度単位で構成されている。図 4.10 の左の形式的折り線図は筆者が知る限りでは、これまでに例がない性質を持ったものである。

本研究によって、図 4.10 の左の形式的折り線図を発見されたのは、列挙という手段を選んだ成果といえる。理論的に図 4.10 の左の形式的折り線図を設計することは困難であるが、45 度系格子パターンに含まれるものを全て列挙し、しらみつぶしに平坦折り可能性を評価したために、それを見つけ出すことができた。

第5章　$2\times n$ の形式的折り線図の平坦折り可能性

第 4 章の結果により、45 度系格子パターンに含まれる形式的折り線図は 2×2、2×3、及び 2×4 については全て平坦折り可能であるかことが判明した。また、2×5 の全ての形式的折り線図を列挙し、それらの平坦折り可能性の評価実験を行った。現在計算中であるが、折り線数が少ないものから平坦折り可能性を評価し、2×5 に含まれる全ての形式的折り線図 1,611,668 通りのうち、1,357,059 通り調べ、平坦折りできないものはなかった

山谷付き展開図について、2×5 の格子に折り線が乗るもので折りたためない例が示されている（図 4.12)。しかし、本研究で取り扱っている形式的折り線図は山谷が割り当てられていないので、山谷が割り当てられている場合よりも折りたたみ方の制約が少ない。そこで本章では全ての自然数 n に対して「$2\times n$ の 45 度系格子パターンに含まれる形式的折り線図は全て平坦折り可能である」と予想し、その証明を試みた。

今回の証明では帰納法を用いる。まず、2×1 の 45 度系格子パターンに含まれる形式的折り線図が全て平坦折り可能であることを示す。次に、$2\times n$の形式的折り線図が折りたたみ可能であると仮定し、新しい 2×1 の形式的折り線図を $2\times n$の形式的折り線図に追加して $2\times(n+1)$ のものを作りだす。2×1 の形式的折り線図を追加する際には、紙の交差が発生する可能性があるため、交差が発生しない条件を決定し、その条件を満たすことができ、なおかつ、$2\times(n+1)$ の形式的折り線図は折りたたみ可能であることを示す。

本章で提案された証明方法は、「$2\times n$ の 45 度系格子パターンに含まれる形式的折り線図は全て平坦折り可能である」ことを証明しきれていない。現在の証明方法では対応できない場合の詳細は、5.5.2 節の「交差状態 4 が発生する可能性のあるもの」に示された「(ウ)について」で示している。

5.1　定義

5.1.1　用語

本節では、証明に用いる用語の定義について示す。

- 展開図要素 ： 2×1 の形式的折り線図
- p_n ：連結された展開図要素を左から数えて n 番目に位置するもの（図 5.1）
- P_n ： $p_1,\cdots,p_n$ が連結してできた形式的折り線図（図 5.1）
- v_n ： p_n と p_{n+1} が連結してできる 8 価頂点（図 5.1）
- 右端 e_n^R ： p_n の右端の辺
- 右端 $e_n^{R^0}, e_n^{R^1}$ ： e_n^R は格子の線分によって 2 つに分離されるが（図 5.1）、それらを区別するときの表記。区別するが、$e_n^{R^0}, e_n^{R^1}$ が両方当てはまるときは $e_n^{R^{(0,1)}}$ と表記する。
- 左端 e_{n+1}^L ： p_{n+1} （P_n に新しく追加する展開図要素）の左端の辺
- 左端 $e_{n+1}^{L^0}, e_{n+1}^{L^1}$ ： e_{n+1}^L は格子の線分によって 2 つに分離されるが（図 5.1）、それら

を区別するときの表記。区別するが、$e_{n+1}^{L^0}, e_{n+1}^{L^1}$ が両方当てはまるときは $e_{n+1}^{L^{(0,1)}}$ と表記する。

- 基本条件 ： 右端 e_n^R と左端 e_{n+1}^L が接続した際に発生する交差の状態を、以下の交差状態 1 ～ 4 に限定させるために p_n と p_{n+1} の折りたたみ方法が満たすべき条件
- 交差状態 1 ～ 4 ： p_n と p_{n+1} の折りたたみ方法が基本条件を満たしていても、発生する可能性のある交差

5.1.2 p_n と p_{n+1} の接続

今回の証明では、折りたたまれていると仮定する P_n に連結されている p_n と、折りたたまれている p_{n+1} を接続し、P_{n+1} を作りだす。p_n と p_{n+1} には、それぞれ右端 $e_n^{R^{(0,1)}}$ と左端 $e_{n+1}^{L^{(0,1)}}$ が存在する（図 5.1)。$e_n^{R^0}$ と $e_{n+1}^{L^0}$ が接続され、$e_n^{R^1}$ と $e_{n+1}^{L^1}$ が接続されることで、p_n と p_{n+1} の接続を実現する。p_n と p_{n+1} の接続が可能であるための必要条件は、5.3 節の基本条件で示す。

また、p_n と p_{n+1} の接続をする際に、紙の表裏が矛盾した状態では接続ができない（図 5.2)。しかし、山谷を逆にすれば同じ重なり順序を維持したまま紙の表裏を逆転できるため、表裏の矛盾は考慮しない。

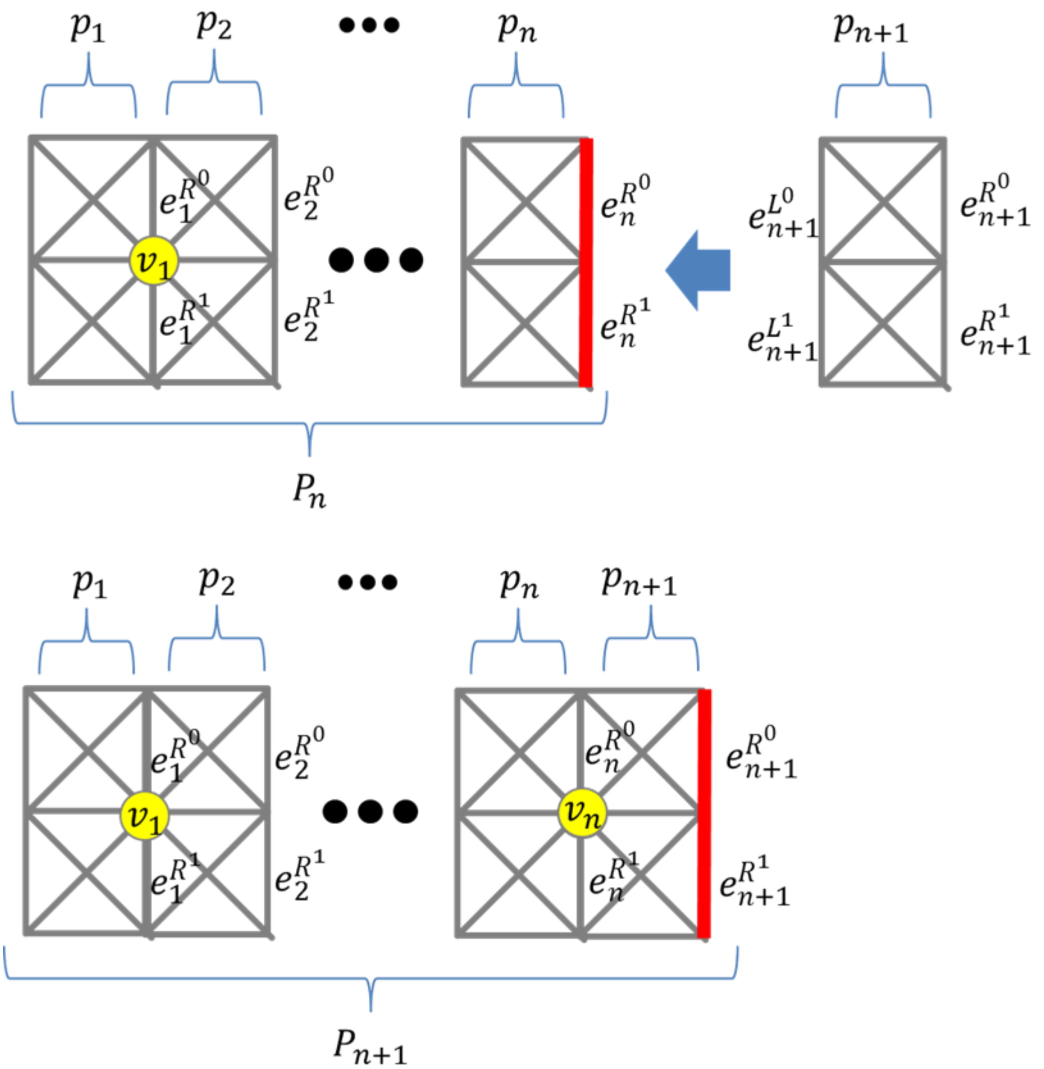


図 5.1 p_n と p_{n+1} の接続の様子。上は接続前。下は接続後。実際は P_n と p_{n+1} は折りたたまれた状態で接続する。

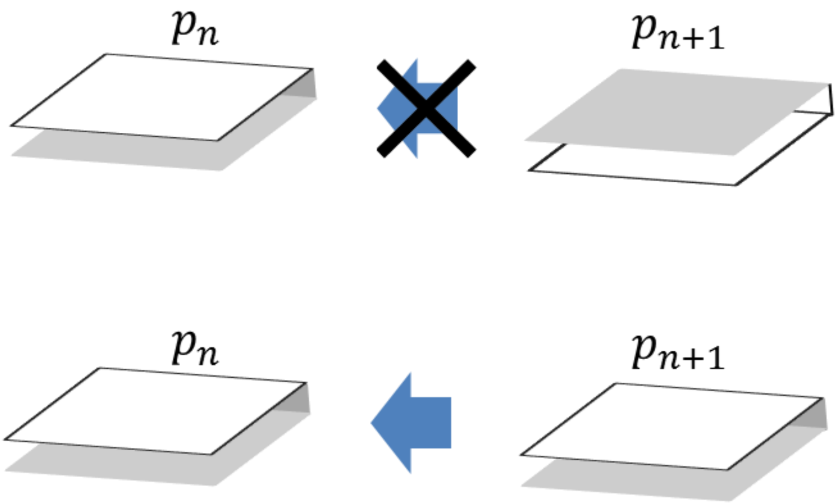


図 5.2　互いに接続する 2 つの展開図要素が表面と裏面の矛盾により接続できない様子（上）。しかし、山谷を逆にすれば同じ重なり順序を維持したまま紙の表裏を逆転できる（下）。白色の面が表、灰色の面が裏

5.1.3　　重なり順序の記述

本論文では、構成面の重なり順を図 5.3 のように示す。赤い四角が最上部に位置し、線で結ばれた順に構成面を下に重ねる。

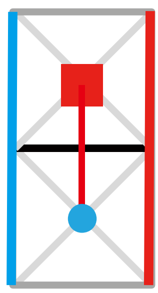


図 5.3　本論文で使用する構成面の重なり順序の記述方法。赤い四角が最上部に位置し、赤い線で結ばれた順に構成面を下に重ねる。

5.2　　証明の概要と構成

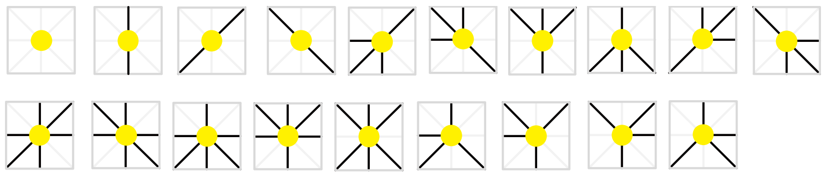
本節では、証明の構成について示す。まず今回の証明は以下の 2 つが真であることを示すことを目指している。以下の項目に記されている基本条件についての詳細は 5.3 節で示す。

命題1:　全ての展開図要素は基本条件（A）～（E）を満たす折りたたみが可能である

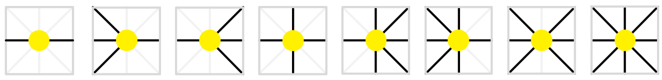
命題2:　P_k が折りたたまれており、なおかつ、p_k が基本条件（A)、(B)、(E）を満たすように折りたたまれていると仮定すると、p_{k+1} は v_k が局所平坦折り可能を満たすのならば p_k と接続可能であり、接続後は p_{k+1} は基本条件（A)、(B)、(E）を満たすように折りたたまれている

基本条件は展開図要素同士が接続可能となる必要条件であり、基本条件（A)、(B）は右端についての条件、基本条件（C)、(D）は左端について、基本条件（E）は右端と左端の必要条件である。p_k と p_{k+1} が接続できるためには、e_k^R は基本条件（A)、(B)、(E）を満たす必要があり、e_{k+1}^L は基本条件（C)、(D)、(E）を満たす必要がある。

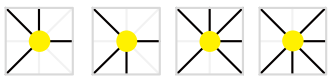
しかし、基本条件を満たしていても発生する交差が存在する。それらの交差を交差状態 1 ～ 4 と呼ぶ（詳細は 5.4 節)。どの交差が発生するかは 8 価頂点 v_k で判断できる。局所平坦折り可能条件を満たす 8 価頂点は 36 通りであり、どの交差が発生するか v_k を分類したものを図 5.4 で示す。



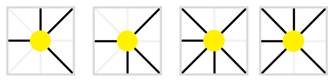
交差状態 1 ～ 4 が発生しないケース



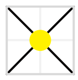
交差状態 1 が発生する可能性があるケース



交差状態 2 が発生する可能性があるケース



交差状態 3 が発生する可能性があるケース



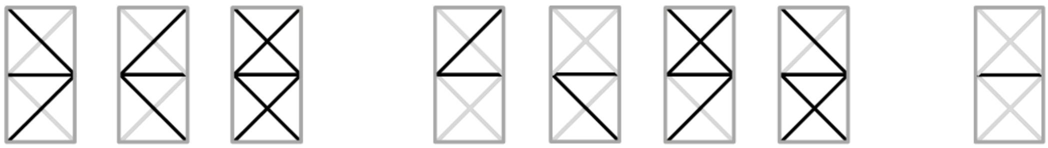
交差状態 4 が発生する可能性があるケース

図 5.4　交差状態 1 ～ 4 が発生するケースごとに 8 価頂点 v_k を分類したもの

分類された v_k ごとに、交差を回避する方法を 5.4 節で示す。p_k と p_{k+1} を接続するとき、交差状態 1 ～ 4 が発生するケースで場合分けをする。詳細は 5.5.2 節で示すが、p_k と p_{k+1} が接続可能でことの証明の流れを以下に示す。また、項目ごとに接続可能であるかを示す。

- 交差状態 1 ～ 4 が発生しないケースでは、p_k が基本条件（A)、(B)、(E）を満たすように折りたたまれていれば、基本条件（A）～（E）を満たすように折りたたまれている p_{k+1} を接続可能
- 交差状態 1 発生する可能性があるケースでは、基本条件（A）～（E）を満たしながら、交差を回避する p_{k+1} の折りたたみ状態があるため、p_k が基本条件（A)、(B)、(E）を満たすように折りたたまれていれば接続可能
- 交差状態 2 発生する可能性があるケースでは、基本条件（A）～（E）を満たしながら、交差を回避する p_{k+1} の折りたたみ状態があるため、p_k が基本条件（A)、(B)、(E）を満たすように折りたたまれていれば接続可能

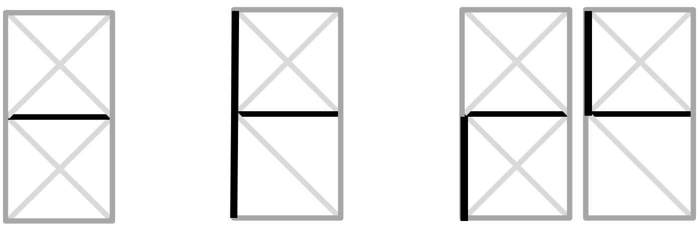
- 交差状態 4 発生する可能性があるケースについては、$v_j (1 \leq j \leq k)$ から左に進んで v_k まで交差状態 3 が発生する可能性があるものであれば、e_j^L を切って、p_k と p_{k+1} をそれぞれ広げた状態で接続し、$2\times(k-j+2)$ の形式的折り線図を作る。このとき、p_j と p_k に関してそれぞれ基本条件 (A)、(B)、(E) と基本条件 (A) ～ (E) が満たされるようにこの $2\times(k-j+2)$ の形式的折り線図が折りたたまれることを以下のように更に場合分けをして示す。
  - $k > j$ の場合。$2\times(k-j+2)$ の形式的折り線図を段折りと呼ばれる折り操作をすれば、p_j と p_k に関してそれぞれ基本条件 (A)、(B)、(E) と基本条件 (A) ～ (E) が満たされる折りたたみ状態になる
  - $k = j$ の場合。$2\times(k-j+2)$ の形式的折り線図は 16 通り存在し、各々に対して、p_j と p_k に関してそれぞれ基本条件 (A)、(B)、(E) と基本条件 (A) ～ (E) が満たされる折りたたみ方を示す。
- 交差状態 3 発生する可能性あるケースでは、8 パターン存在する p_k の $e_k^{R^{(0,1)}}$ の重なり順序の変更が可能ならば、基本条件 (A) ～ (E) を満たすように折りたたまれている p_{k+1} と接続可能となる。図のように場合分けをする。



1　　　　2　　　　3

図 5.5　交差状態 3 発生する可能性あるケースについて、8 パターン存在する p_k の分類

- 図 5.5 の 1 の場合、基本条件 (A) ～ (E) を満たしながら折りたたまれている p_{k+1} と接続可能となる p_k の折りたたみ方は存在する。
- 図 5.5 の 2 の場合についても、基本条件 (A) ～ (E) を満たしながら折りたたまれている p_{k+1} と接続可能となる p_k の折りたたみ方は存在する。
- 図 5.5 の 3 の場合、以下のように更に場合分けをする。
  - (ア) P_n が図 5.34 の (i) (ii) の展開図要素のみで構成されている場合。P_n 全体に対する操作で $e_k^{R^{(0,1)}}$ 重なり順序の変更が可能
  - (イ) $p_{j+1} (1 \leq j < n)$ が図 5.34 の (i) か (ii) のどちらかで、p_j に図 5.34 の展開図要素以外のものが初めて現れる場合。$e_{j-1}^{R^{(0,1)}}$ の重なり順序が変更可能であれば、$e_k^{R^{(0,1)}}$ の重なり順序も変更可能
  - (ウ) $p_{j+1} (1 \leq j < n)$ が図 5.34 の (iii) で、p_j に図 5.34 の展開図要素以外のものが初めて現れる。今回の証明では、この場合については未解決である。



(i)　　(ii)　　(iii)

図 5.6　図 5.5 における更なる場合分け、左端の折り線の有無よって分類

証明に必要な事前知識を 5.3 節と 5.4 節で示す。5.3 節では、基本条件について説明する。基本条件は 5.4 節では、基本条件を満たしながら発生する可能性のある紙の交差について、どのような状況でそれらの交差が生じるのか、そしてどのようにすればその交差が回避できるのかについて説明する。

5.5 節から証明を示す。証明方法としては、P_n に基本条件を満たした折りたたまれ方をした展開図要素 p_{n+1} を紙の交差が発生することなく追加可能であることを示す。P_n に p_{n+1} を追加するとき交差状態 1 ～ 4 のいずれかが発生する可能性があるが、5.4 節で示した回避方法が p_{n+1} を追加時に実現可能であることを示す。

5.3　基本条件

本章では、既に折りたたんだ状態にある P_n に折りたたまれた p_{n+1} を連結して P_{n+1} を作りだす。P_n に含まれる展開図要素 p_n と新たに連結する p_{n+1} にはそれぞれ右端 $e_n^{R^{(0,1)}}$ と左端 $e_{n+1}^{L^{(0,1)}}$ が存在する。$e_n^{R^0}$ と $e_{n+1}^{L^0}$ が接続し、$e_n^{R^1}$ と $e_{n+1}^{L^1}$ が接続される。右端 $e_n^{R^{(0,1)}}$ と左端 $e_{n+1}^{L^{(0,1)}}$ の間に障害物となる紙が存在しなければ接続可能である。障害物となる紙が原因で接続ができない状態を図 5.7 に示す。接続を妨害する障害物となる紙が存在しないようにするには、$e_n^{R^{(0,1)}}$ がそれぞれの重なる構成面で最上部に位置すればいい（図 5.8、図 5.9）。しかしながら、p_{n+1} の右端 $e_{n+1}^{R^{(0,1)}}$ がそれぞれの重なる構成面で最上部に位置した状態で p_n と p_{n+1} が接続できない場合がある（例として、図 5.10）。しかし、p_n の右端と p_{n+1} の左端の間に障害物がなければ接続可能であるので、図 5.10 のような状態を許す。p_n の $e_n^{R^{(0,1)}}$ それぞれの上に重なる構成面は、その輪郭（紙の境界または折り目）が重なっている e_n^R の同一鉛直線上に乗り、なおかつ、折り目の間に $e_n^{R^{(0,1)}}$ が位置していなければ、紙の妨害は生じない（図 5.11）。ただし、$e_n^{R^{(0,1)}}$ の上に重なる構成面は p_n に含まれるもののみとする。

また、$e_{n+1}^{L^{(0,1)}}$ についても紙の妨害がない状態にする必要がある。更に、$e_{n+1}^{R^{(0,1)}}$ についても紙の妨害がない状態しなければならない。$e_{n+1}^{L^{(0,1)}}$ について紙の妨害が生じる状態は、$e_{n+1}^{L^{(0,1)}}$ のそれぞれの下に位置する構成面が、P_n に衝突するか、折り目の間に $e_{n+1}^{L^{(0,1)}}$ が存在している場合である（図 5.12）。$e_{n+1}^{L^{(0,1)}}$ のそれぞれの下に重なる構成面の輪郭が、重なっている e_{n+1}^L の同一鉛直線上に乗り、なおかつ、折り目の間に左端 $e_{n+1}^{L^{(0,1)}}$ が位置していれば紙の妨害はない（図 5.13）。

また、展開図要素の 2 つの左端のいずれか、もしくは両方がその展開図要素自身の右端のいずれか、もしくは両方と互いに重なり合う場合、展開図要素の接続時に図 5.14 のような交差が生じる場合がある。この交差を回避するために、p_n と p_{n+1} について右端が左端と重なる場合、右端が上に位置するように折りたたむ。

よって本稿では、$e_n^{R^{(0,1)}}$ と $e_{n+1}^{L^{(0,1)}}$ が接続するとき、p_n と p_{n+1} の折りたたみ方法が満たすべき基本条件を以下のようにする。

基本条件

(A) 展開図要素 p の二分される右端はそれぞれ重なるレイヤーで最上部に位置している。もしくは、上に重なる構成面は p に含まれるもののみで、その輪郭は境界辺の同一鉛直線上に乗る。

(B) 展開図要素 p の二分される右端はどちらも折り目の間に位置していない。

(C) 展開図要素 p の二分される左端はそれぞれ重なるレイヤーで最下部に位置している。もしくは、下に重なる構成面は p に含まれるもののみで、その輪郭は境界辺の同一鉛直線上に乗る。
(D) 展開図要素 p の二分される左端はどちらも折り目の間に位置していない。
(E) 展開図要素 p の右端が左端と重なる場合は、右端は重なる左端より上に位置している。

P_n に p_{n+1} を新しく追加するとき、p_n は(A)、(B)、(E)の基本条件を満たす必要があり、p_{n+1} は (A) ～ (E) の基本条件を満たす必要がある。

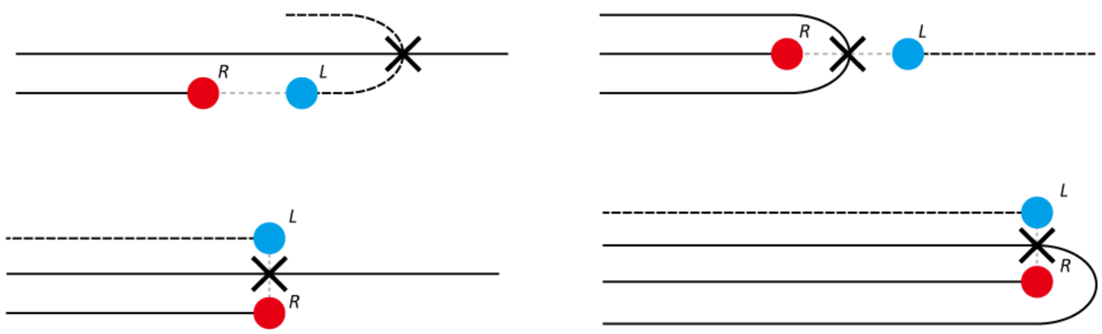


図 5.7　右端と左端の間に障害物となる紙が存在し、接続できない様子（断面図）。赤丸は右端。青丸は左端。実線は p_n に含まれる構成面。破線は p_{n+1} に含まれる構成面

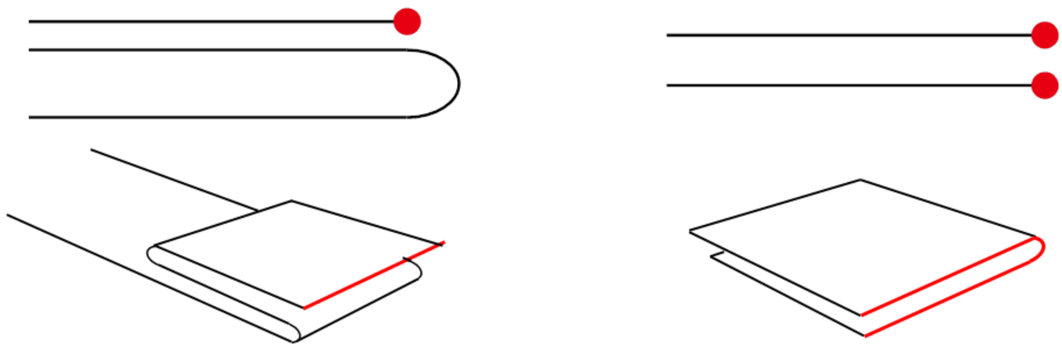


図 5.8　右端（赤い線）が最上部に位置している状態。上の図は紙の断面図である。上の赤丸は右端

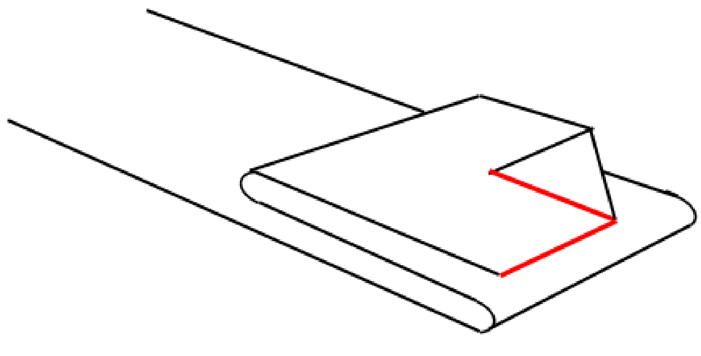


図 5.9　2 つの右端（赤い線）がそれぞれ重なるレイヤーで最上部に位置している様子

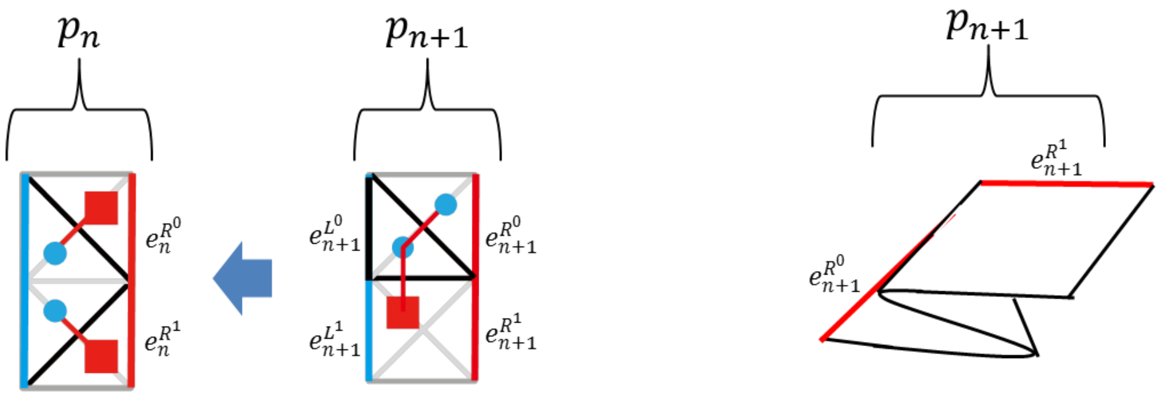


図 5.10　p_{n+1} の 2 つの右端がそれぞれ重なるレイヤーで最上部に位置したまま、p_n と接続できない例。このとき p_{n+1} の $e_{n+1}^{R^0}$ は $e_{n+1}^{R^1}$ を含む構成面の下に重なる必要がある。左図の青い線は左端

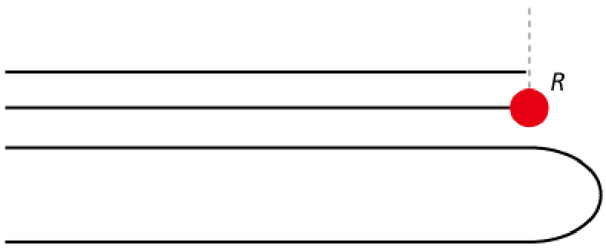


図 5.11　右端の上に重なる構成面の輪郭が、その同一鉛直線上に乗り、なおかつ、右端は折り目の間に存在しない様子。赤丸は右端

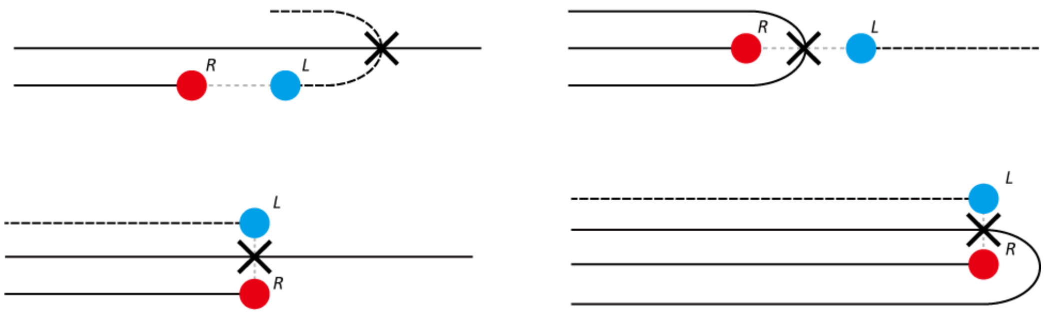


図 5.12　右端と左端の間に障害物となる紙が存在し、接続できない様子。赤丸は右端。青丸は左端。実線は p_n に含まれる構成面。破線は p_{n+1} に含まれる構成面

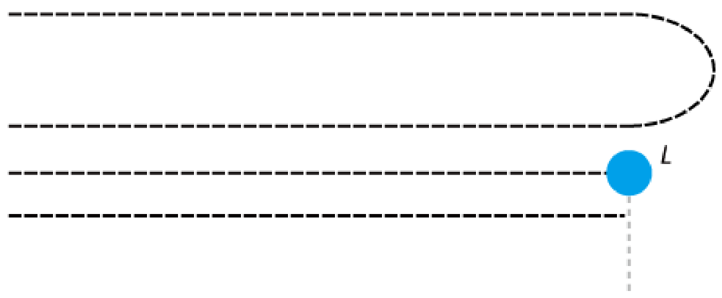


図 5.13　左端の下に重なる構成面の輪郭が、その同一鉛直線上に乗る様子。青丸は左端

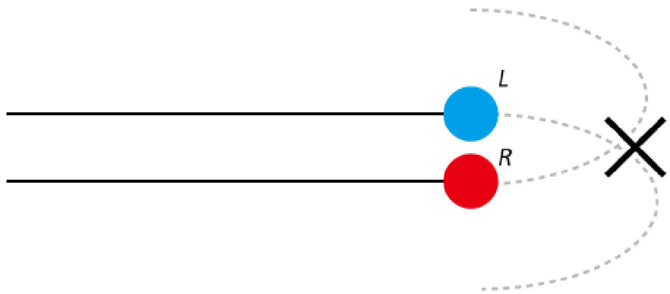


図 5.14　右端と左端が重なるとき、右端が下に重なることにより生じる交差。赤丸は右端。青丸は左端

5.4　基本条件を満たしながら発生する可能性のある交差

p_n と p_{n+1} がそれぞれ基本条件を満たす折りたたみ方をされていても、紙の交差が生じる場合がある。これらの紙の交差は 4 通りの状態がある。

交差状態 1

p_n と p_{n+1} を接続したときにできる 8 価頂点 v_n が図 5.15 に示されたパターンのとき、p_n と p_{n+1} を接続したとき、図 5.16 の交差が発生する場合がある。v_n が図 5.15 のとき、p_n の $e_n^{R^{(0,1)}}$ は互いに重なり合い、p_{n+1} の $e_{n+1}^{L^{(0,1)}}$ も互いに重なり合う。図 5.16 の交差が発生するのは、互いに接続される関係にある $e_n^{R^{(0,1)}}$ と $e_{n+1}^{L^{(0,1)}}$ のそれぞれの重なり順序の整合性がとれていないためである。この交差を回避するためには、$e_n^{R^{(0,1)}}$ と $e_{n+1}^{L^{(0,1)}}$ のそれぞれの重なり順序を交差が発生しないように整合性をとれるようにしなければならない。

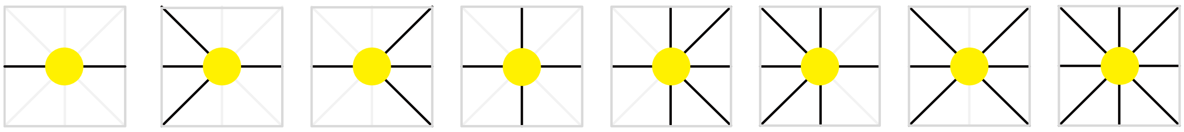


図 5.15　p_n と p_{n+1} を接続したとき、交差状態 1 が発生する可能性のあるときの 8 価頂点

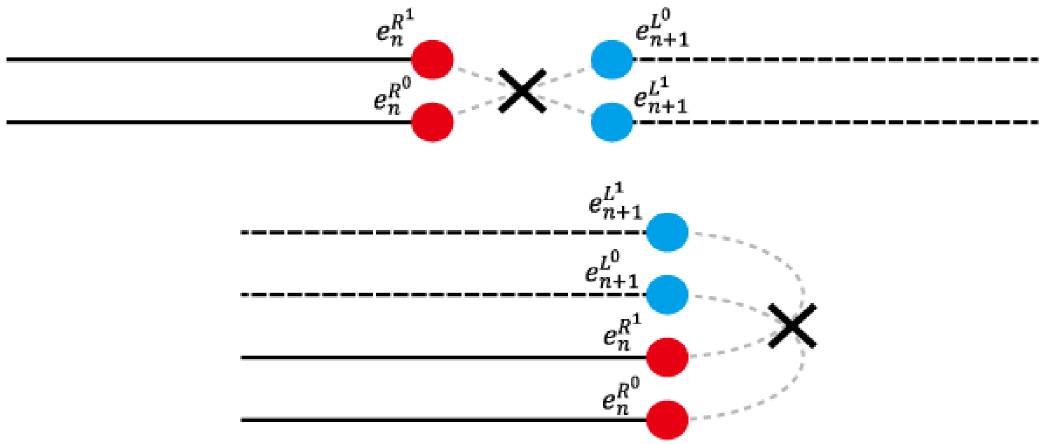


図 5.16　互いに接続される関係にある右端と左端の重なり順序の整合性がとれていないために発生する交差。上は右端と左端の接続部に折り線がない場合、下はある場合。

交差状態 2

p_n と p_{n+1} を接続したときにできる 8 価頂点 v_n が図 5.17 に示されたパターンのとき、p_n と p_{n+1} を接続したとき、図 5.18 の交差が発生する場合がある。v_n が図 5.17 のとき、p_n の $e_n^{R^{(0,1)}}$ は互いに重なり合わないが、p_{n+1} の $e_{n+1}^{L^{(0,1)}}$ は互いに重なり合う。図 5.17 のパターンを見てみると、$e_n^{R^0}$ と $e_{n+1}^{L^0}$ または $e_n^{R^1}$ と $e_{n+1}^{L^1}$ の接続部のどちらか一方に折り線が存在している。図 5.18 の交差が発生するのは、折り線がない端同士が接続するとき、折り線がある端同士が接続してできた折り目を横切ってしまうからである。この交差を回避するためには、互いに重なり合う $e_{n+1}^{L^{(0,1)}}$ のうち、折り線ができるものが一方より下に位置させればいい。

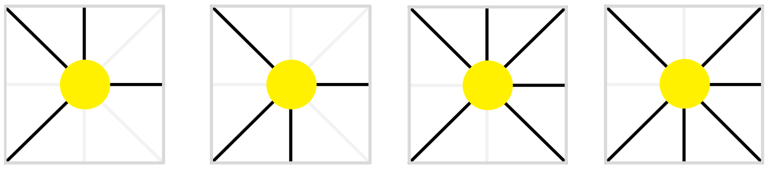


図 5.17　$\boldsymbol{p_n}$ と $\boldsymbol{p_{n+1}}$ を接続したとき、交差状態 2 が発生する可能性のあるときの 8 価頂点

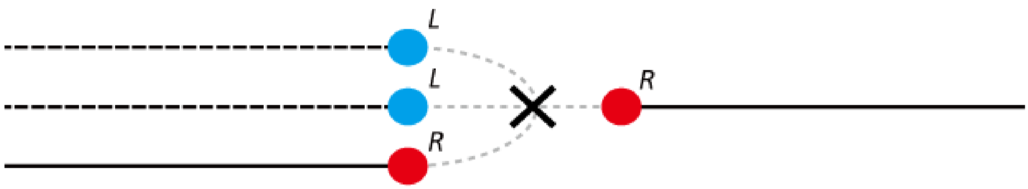


図 5.18　$\boldsymbol{p_{n+1}}$ の $\boldsymbol{e_{n+1}^{L(0,1)}}$ が互いに重なり合う場合、折り線がない端同士が接続するとき、折り線がある端同士が接続してできた折り目を横切ってしまうために発生する交差

交差状態 3

p_n と p_{n+1} を接続したときにできる 8 価頂点 v_n が図 5.19 に示されたパターンのとき、p_n と p_{n+1} を接続したとき、図 5.20 の交差が発生する場合がある。v_n が図 5.19 のとき、p_n の $e_n^{R(0,1)}$ は互いに重なり合うが、p_{n+1} の左端 $e_{n+1}^{L(0,1)}$ は互いに重なり合わない。図 5.19 のパターンを見てみると、$e_n^{R^0}$ と $e_{n+1}^{L^0}$ または $e_n^{R^1}$ と $e_{n+1}^{L^1}$ の接続部のどちらか一方に折り線が存在している。図 5.20 の交差が発生するのは、交差状態 2 と同じ理由で、折り線がない端同士が接続するとき、折り線がある端同士が接続してできた折り目を横切ってしまうからである。交差が発生する理由は同じであるが、回避方法が異なるため、交差状態 2、3 とで分けることにした。この交差を回避するためには、互いに重なり合う $e_n^{R(0,1)}$ のうち、折り線ができる右端が一方より上に位置させればいい。

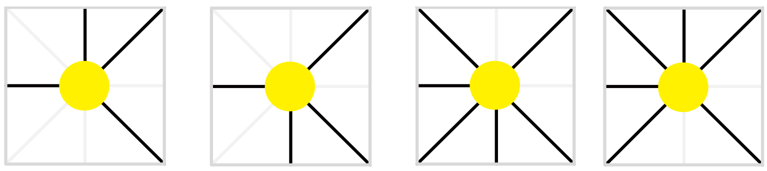


図 5.19　$\boldsymbol{p_n}$ と $\boldsymbol{p_{n+1}}$ を接続したとき、交差状態 3 が発生する可能性のあるときの 8 価頂点

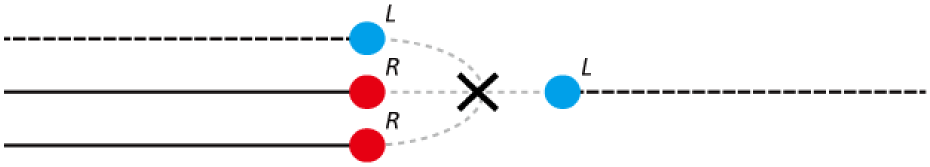


図 5.20　$\boldsymbol{p_n}$ の $\boldsymbol{e_n^{R(0,1)}}$ が互いに重なり合う場合、折り線がない端同士が接続するとき、折り線がある端同士が接続してできた折り目を横切ってしまうために発生する交差

交差状態 4

p_n と p_{n+1} を接続したときにできる 8 価頂点 v_n が図 5.21 のとき、p_n と p_{n+1} が基本条件を満たした折りたたまれ方の状態では図 5.22 の紙の交差が発生する。この交差は 2 組の互いに接続する e_n^R と e_{n+1}^L が干渉しあって発生するものである。図 5.22 の紙の交差を回避するためには、p_n と p_{n+1} の連結した 2×2 の形式的折り線図全体の重なり方を考える必要がある。具体的な構成面の重なり順序は 5.5.2 節の「交差状態 4 が発生する可能性のあるもの」で示す。

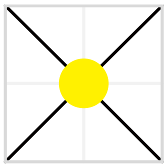


図 5.21 p_n と p_{n+1} を接続したとき、交差状態 4 が発生する可能性のあるときの 8 価頂点

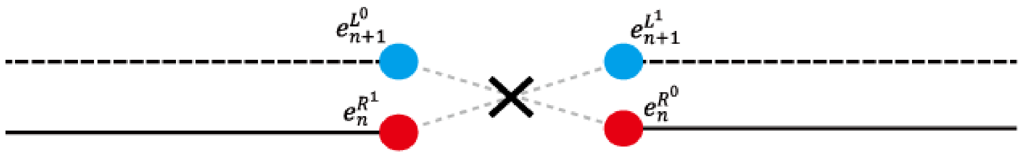


図 5.22 2 組の互いに接続する e_n^R と e_{n+1}^L が干渉しあって発生する交差。右端と左端はそれぞれ基本条件を満たしているが、交差が発生してしまう

p_n と p_{n+1} を接続するとき、上記のいずれの交差が発生するのか、p_n と p_{n+1} を接続した後にできる頂点 v_n から判断できる。本章では、頂点 v_n の局所平坦折り可能条件を満たすことを前提としているので、45 度系格子パターンにおける 8 価頂点で局所平坦折り可能条件を満たす 36 パターンを 4 つの交差状態で分類する。また、上記のいずれの交差も生じない場合もある（図 5.23）。

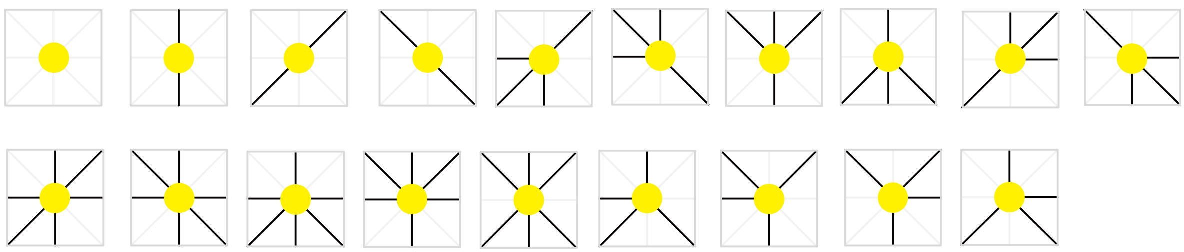


図 5.23 それぞれ基本条件を満たした折りたたまれ方をしている p_n と p_{n+1} を連結したとき、交差が発生しないときの 8 価頂点

5.5　2×nの形式的折り線図は全て平坦折り可能

5.5.1　$n = 1$ のとき

$n = 1$ のとき、p_n が節 5.3 の基本条件（A）～（E）を満たす折りたたみ方が可能であるのか考える。つまり、「全ての展開図要素は基本条件（A）～（E）を満たす折りたたみが可能である」ことを示せばいい。図 5.24 は 45 度系格子パターンに含まれる展開図要素全てを示している。図 5.25 は全ての展開図要素について、基本条件（A）～（E）を満たす状態で折りたたまれる構成面の重なり方を示したものである。

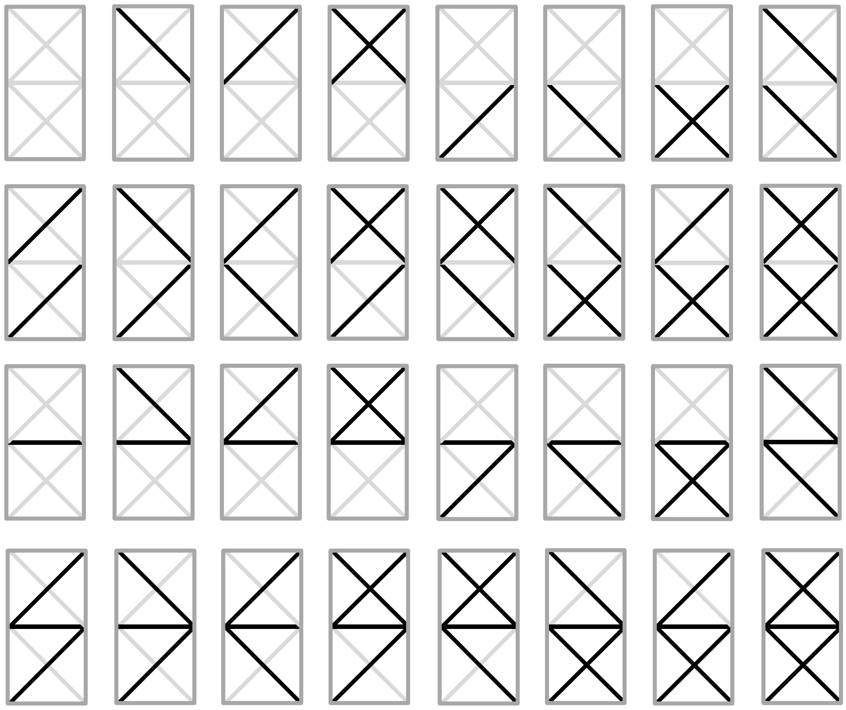


図 5.24　45 度系格子パターンに含まれる全ての展開図要素（32 通り）

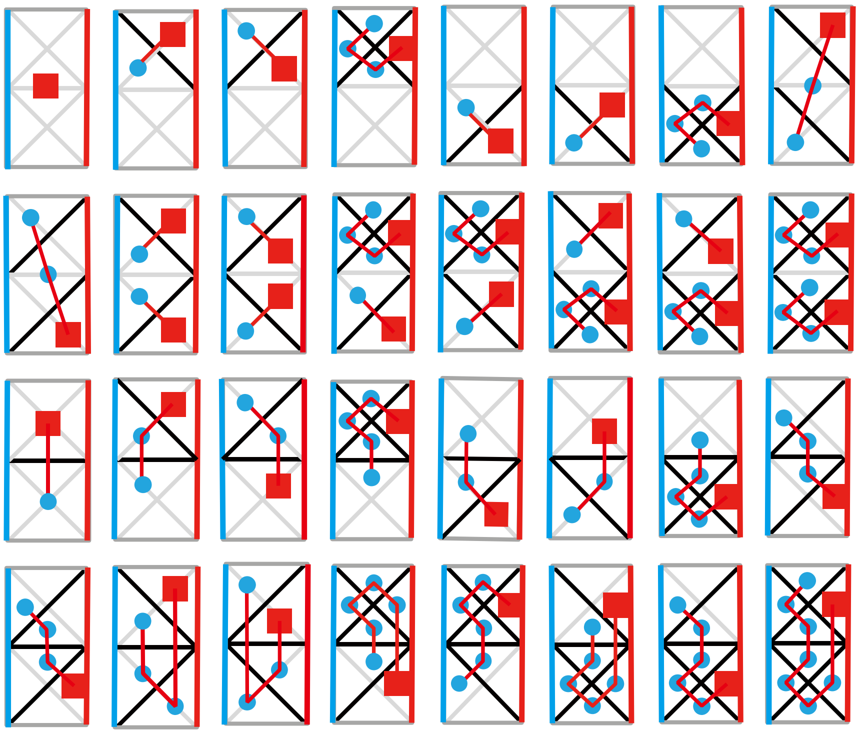


図 5.25　図 5.24 の展開図要素を基本条件（A）～（E）を満たすように折りたたんだ結果

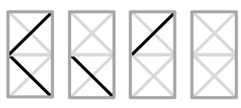
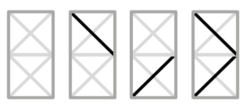
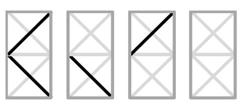
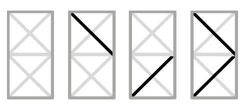
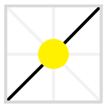
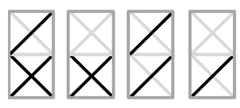
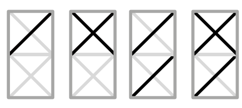
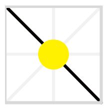
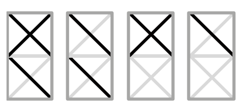
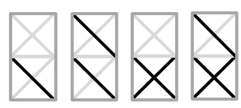
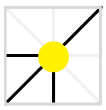
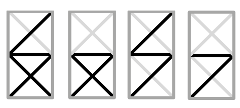
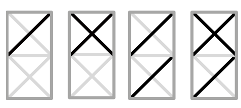
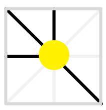
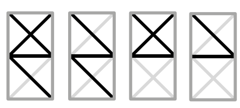
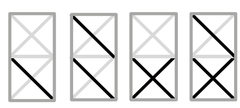
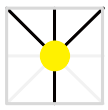
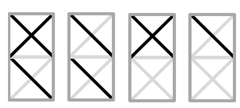
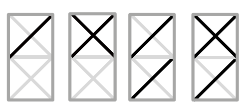
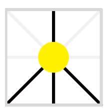
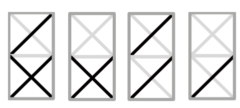
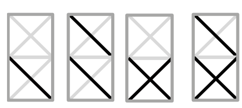
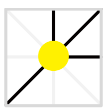
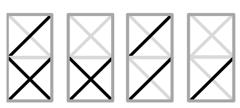
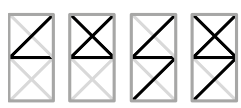
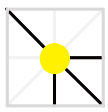
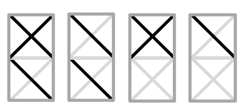
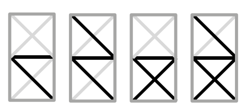
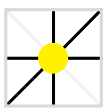
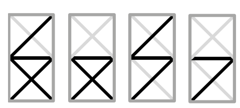
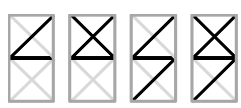
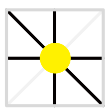
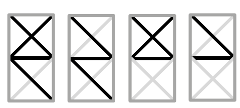
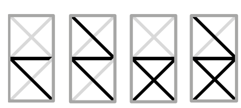
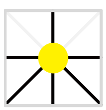
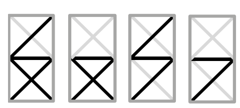
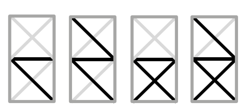
5.5.2　$n = k + 1$ のとき

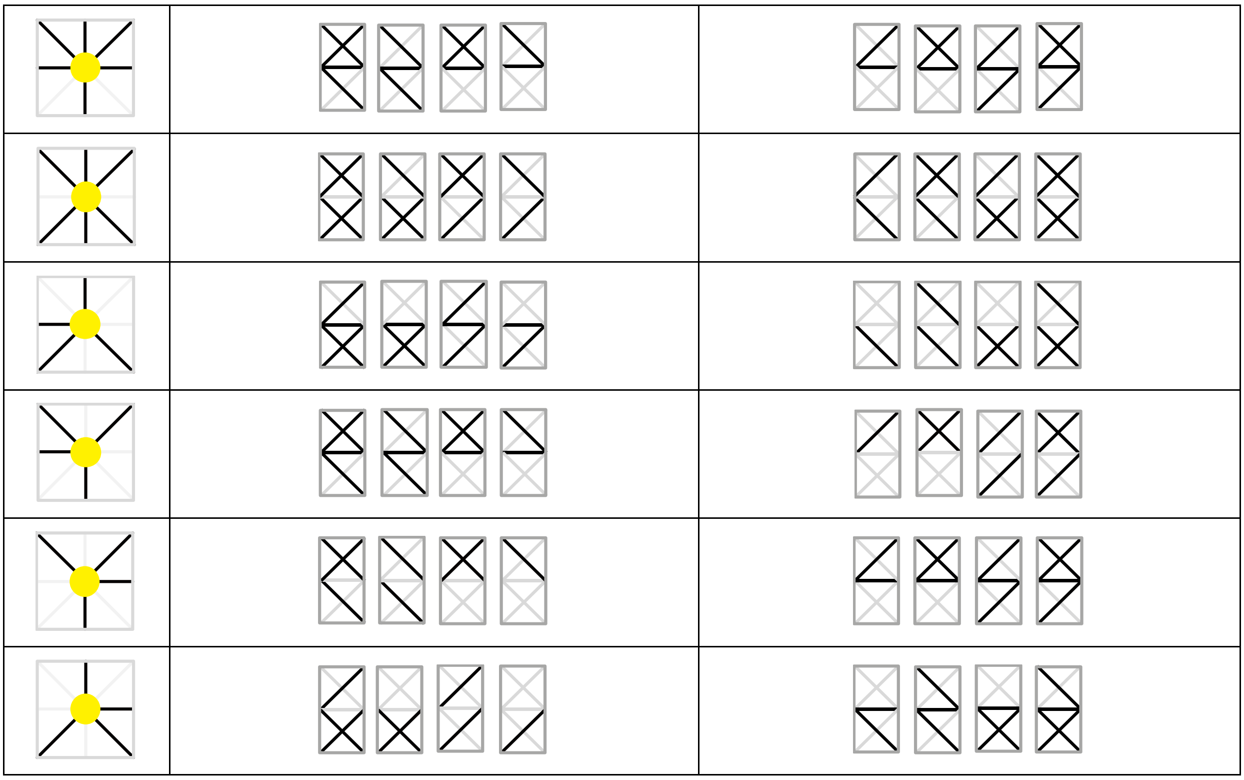
$n = k$ のとき、P_n が折りたたまれており、なおかつ、p_n が右端に関する基本条件（A)、(B)、(E）を満たして折りたたまれていると仮定する。このとき、接続後に新たにできる 8 価頂点 v_n が局所平坦条件を満たす展開図要素全てが基本条件（A）～（E）を満たすように折りたたまれている状態で p_n と紙の交差無しで接続可能であることを示す。本節では、新しくできる 8 価頂点 v_n を分類し、それぞれの分類ごとに p_n と p_{n+1} の接続について考察していく。

基本条件を満たしていれば、交差が発生しないもの

$n = k$ のとき、P_n が折りたたまれており、なおかつ、p_n が右端に関する基本条件（A)、(B)、(E）を満たして折りたたまれていると仮定する。p_n と p_{n+1} が構成する 8 価頂点 v_n が「基本条件を満たしていれば、交差が発生しないもの」に属している場合、p_n に関しては右端に関する基本条件（A)、(B)、(E）を満たしており、p_{n+1} に関しては全ての基本条件（A）～（E）を満たしていれば紙の交差を発生することなく p_n と p_{n+1} は接続できる。表 5.1 にそれらの 8 価頂点 v_n とそれぞれの 8 価頂点を構成する p_n と p_{n+1} を示す。展開図要素の全ては基本条件（A）～（E）を満たすことが可能なので、p_n と p_{n+1} は問題なく接続できる。

表 5.1　基本条件を満たしていれば、交差が発生しないものに分類される 8 価頂点 $\boldsymbol{v_n}$ とそれぞれの 8 価頂点を構成する $\boldsymbol{p_n}$ と $\boldsymbol{p_{n+1}}$

v_n	p_n	p_{n+1}
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		
		

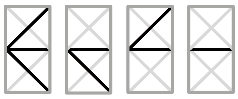
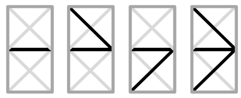
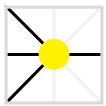
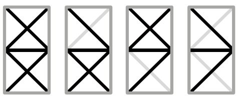
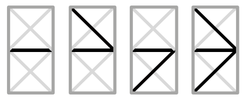
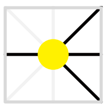
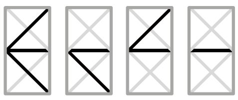
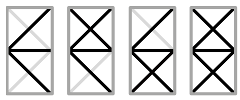
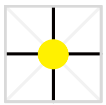
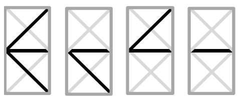
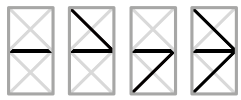
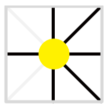
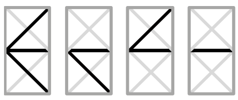
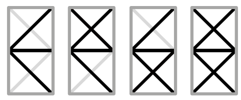
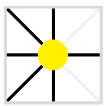
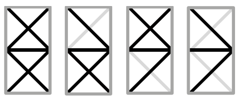
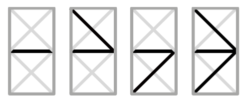
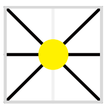
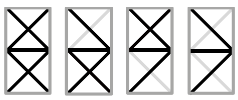
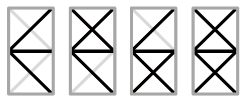
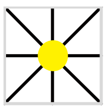
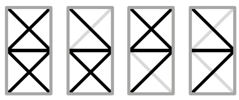
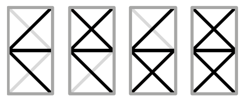


交差状態 1 が発生する可能性のあるもの

$n = k$ のとき、P_n が折りたたまれており、なおかつ、p_n が右端に関する基本条件 (A)、(B)、(E) を満たして折りたたまれていると仮定する。p_n と p_{n+1} が構成する 8 価頂点 v_n が表 5.2 のパターンになる場合、「交差状態 1 が発生する可能性のあるもの」に分類される。このとき、p_n の $e_n^{R(0,1)}$ は互いに重なり合い、p_{n+1} の $e_{n+1}^{L(0,1)}$ も互いに重なり合う$e_n^{R(0,1)}$ と $e_{n+1}^{L(0,1)}$ のそれぞれの重なり順序の整合性がとれていないと交差状態 1 が発生する。p_n の $e_n^{R(0,1)}$ については基本条件 (A)、(B)、(E) を満たしていれば、それらの重なり順序に制約はない。つまり、p_n と p_{n+1} が接続するときp_{n+1} の $e_{n+1}^{L(0,1)}$ の重なり順序は p_n の $e_n^{R(0,1)}$ の 2 通りの重なり順序に対応できなければならない（下から $e_n^{R^0}, e_n^{R^1}$ の順、または、$e_n^{R^1}, e_n^{R^0}$ の順が考えられる)。よって、表 5.2 の p_{n+1} が下から $e_{n+1}^{L^0}, e_{n+1}^{L^1}$ の順でも $e_{n+1}^{L^1}, e_{n+1}^{L^0}$ でも基本条件 (A) ～ (E) を満たす折りたたみ方が可能であることを示す必要がある。

図 5.26 は表 5.2 の p_{n+1} を $e_{n+1}^{L(0,1)}$ が 2 通りの重なり順序で基本条件 (A) ～ (E）を満たしながら折りたたんだ状態を示している。

表 5.2　交差状態 1 が発生する可能性のあるものに分類される 8 価頂点 v_n とそれぞれの 8 価頂点を構成する p_n と p_{n+1}

v_n	p_n	p_{n+1}
		
		
		
		
		
		
		
		

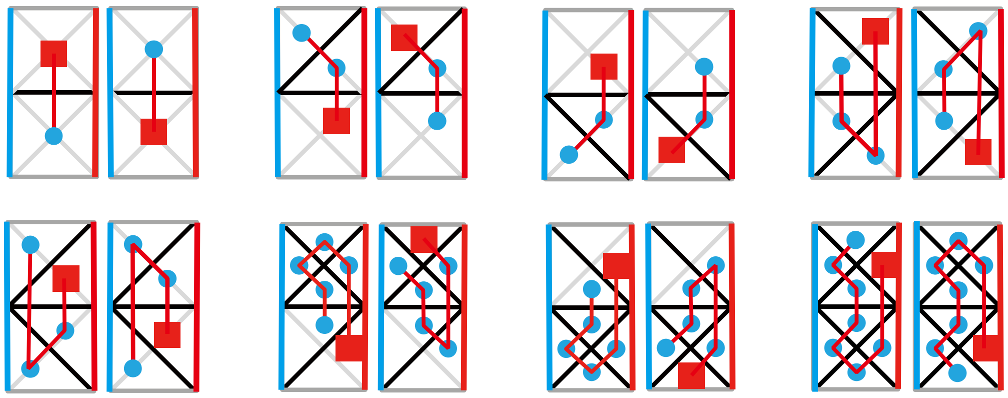


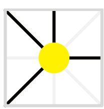
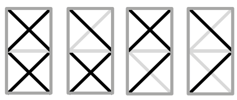
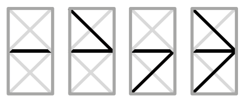
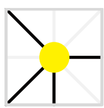
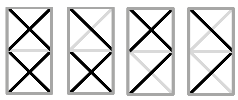
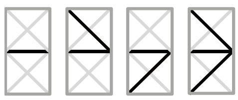
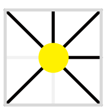
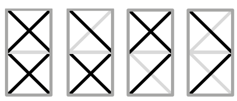
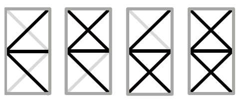
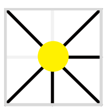
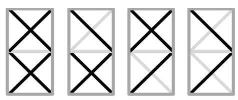
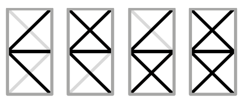
図 5.26　表 5.2 の p_{k+1} の全 8 パターンについて、基本条件を満たしつつ、2 つの左端の辺の重なり順序が 2 通りある事を示している

交差状態 2 が発生する可能性のあるもの

$n=k$ のとき、P_n が折りたたまれており、なおかつ、p_n が右端に関する基本条件 (A)、(B)、(E) を満たして折りたたまれていると仮定する。p_n と p_{n+1} が構成する 8 価頂点 v_n が表 3 のパターンになる場合、$e_n^{R^0}$ と $e_{n+1}^{L^0}$ または $e_n^{R^1}$ と $e_{n+1}^{L^1}$ の接続部のどちらか一方に折り線が存在している。このとき、8 価頂点 v_n は「交差状態 2 が発生する可能性のあるもの」に分類される。表 5.3 にそれらの 8 価頂点 v_n とそれぞれの 8 価頂点を構成する p_n と p_{n+1} を示す。交差状態 2 を回避するためには、表 5.3 の p_{n+1} の全てが、$e_{n+1}^{L^{(0,1)}}$ のうち、折り線を含むものが一方より下に位置させ、なおかつ、基本条件 (A) ～ (E) を満たす折り方が可能であることを確認する必要がある。

図 5.27 は表 5.3 の p_{n+1} が $e_{n+1}^{L^{(0,1)}}$ のうち、折り線を含むものを下に位置させ、なおかつ、基本条件 (A) ～ (E) を満たす折り方を示している。

表 5.3　交差状態 2 が発生する可能性のあるものに分類される 8 価頂点 v_n とそれぞれの 8 価頂点を構成する p_n と p_{n+1}

v_n	p_n	p_{n+1}
		
		
		
		

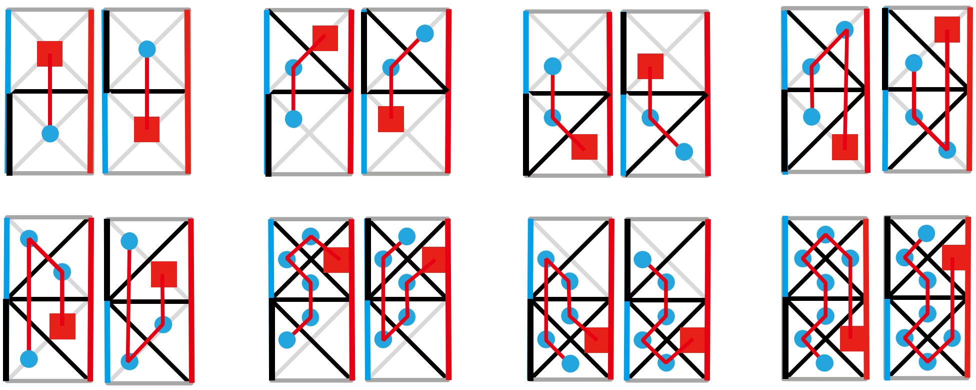


図 5.27　表 5.3 の p_{n+1} の 2 つの左端のうち、折り線がある左端を下に位置するように折りたたんだ様子

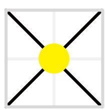
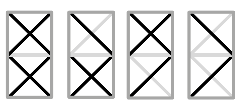
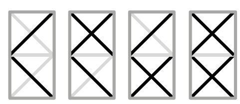
交差状態 4 が発生する可能性のあるもの

$n=k$ のとき、P_n が折りたたまれており、なおかつ、p_n が右端に関する基本条件 (A)、(B)、(E) を満たして折りたたまれていると仮定する。p_n と p_{n+1} が構成する 8 価頂点 v_n が表 5.4 のパターンになる場合、v_n は「交差状態 4 が発生する可能性のあるもの」に分類される。「交差状態 4 が発生する可能性のあるもの」については、p_n と p_{n+1} がそれぞれ基本条件を満たしたままでは接続できない。p_n と p_{n+1} がそれぞれ基本条件を満たしたままでは、2 組の互いに接続する e_n^R と e_{n+1}^L が干渉しあって交差が発生する。また、$v_j(1 \leq j \leq n)$ から v_n までの 8 価頂点が全て「交差状態 4 が発生する可能性のあるもの」である場合がある。

そこで、8 価頂点 v_j から v_n までの全てが「交差状態 4 が発生する可能性のあるもの」になる場合、p_j の左端、つまり p_{j-1} の e_{j-1}^R で P_n を切って分割する。すると、P_{j-1} と $2\times(n-j+1)$ の形式的折り線図ができる。切り取られた $2\times(n-j+1)$ の形式的折り線図と p_{n+1} はそれぞれ折りたたまれていない状態で接続する。接続後は、図 5.28 に示された $2\times(n-j+2)$ の形式的折り線図ができる（図 5.28 は左右上下の 4 角の折り線は無いものとしている）。図 5.28 に示された $2\times(n-j+2)$ の形式的折り線図は、Map folding の折り線を 45 度回転させたものであり、山谷が与えられていない Map folding は常に折りたためることが知られている。

ここで、$n>j$ のとき、$n=j$ のときで場合分けをする。

表 5.4　交差状態 4 が発生する可能性のあるものに分類される 8 価頂点 v_n とそれぞれの 8 価頂点を構成する p_n と p_{n+1}

v_n	p_n	p_{n+1}
		

$n > j$

図 5.28 で示された $2\times(n-j+2)$ の形式的折り線図の実線と破線で描かれた折り線をそれぞれ $c_1,\cdots,c_{n-j+1}$ と $c'_1,\cdots,c'_{n-j+1}$ と呼ぶことにする。まず、折り線 $c_1,\cdots,c_{n-j+1}$ と $c'_1,\cdots,c'_{n-j+1}$のどちらかを図 5.29 のように山折り谷折りを交互に割り当てる（これを段折りと呼ぶ。）。図 5.30 にその折り操作によって折られた図 5.28 の形式的折り線図を示す。次に図 5.30 の破線で描かれた折り線を重なる全てのレイヤーを山折り谷折りの交互に折る。すると図 5.31 の状態になる。最後に左右上下の 4 角の折り線（図 5.28 の緑線）を折ると、p_{n+1} の右端は基本条件 (A)、(B)、(E) を満たし、p_j の左端は基本条件 (C)、(D)、(E) を満たす。このときの p_{j-1} と p_j の交差無しの接続可能性については、p_{j-1} と p_j が構成する 8 価頂点 v_{j-1} は「基本条件を満たしていれば、交差が発生しないもの」と「交差状態 2 が発生する可能性があるもの」となる。詳しくは後述するが、8 価頂点 v_{j-1} が「交差状態 2 が発生する可能性があるもの」となる場合、p_j の左端については基本条件 (C)、(D)、(E) を満たしていれば、接続は可能である。

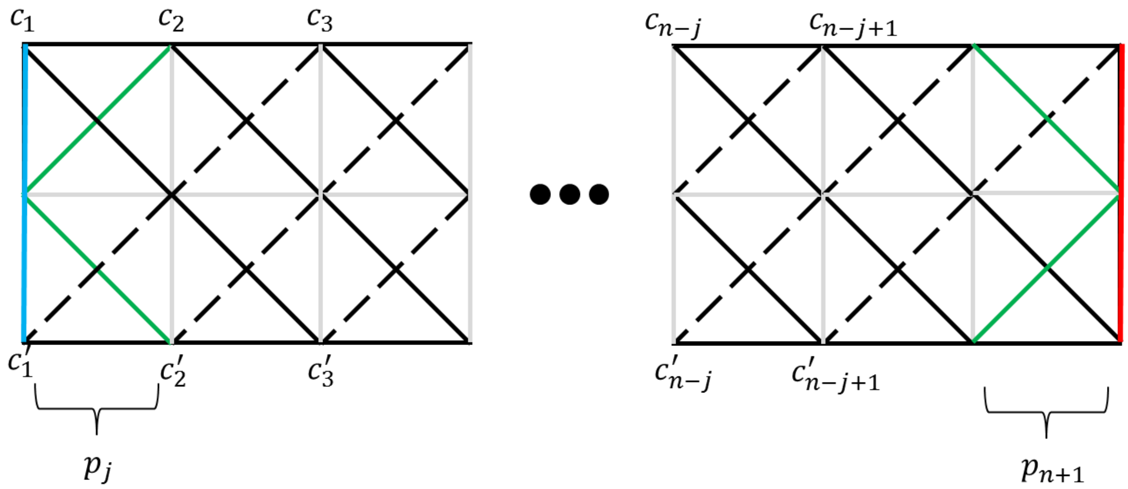


図 5.28　全ての 8 価頂点が特殊なケースで構成される $2\times(n-j+2)$ の形式的折り線図。赤線が右端。青線が左端。緑線は左右上下の 4 角の線

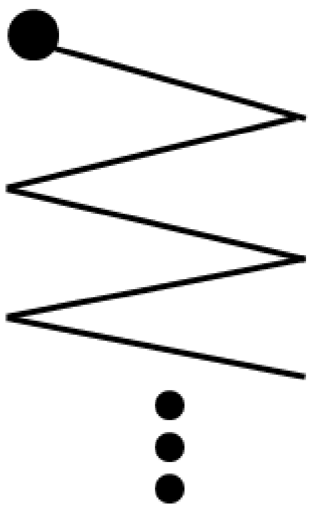


図 5.29　図 5.28 の形式的折り線図を段折りした様子（断面図）。黒丸は形式的折り線図の端

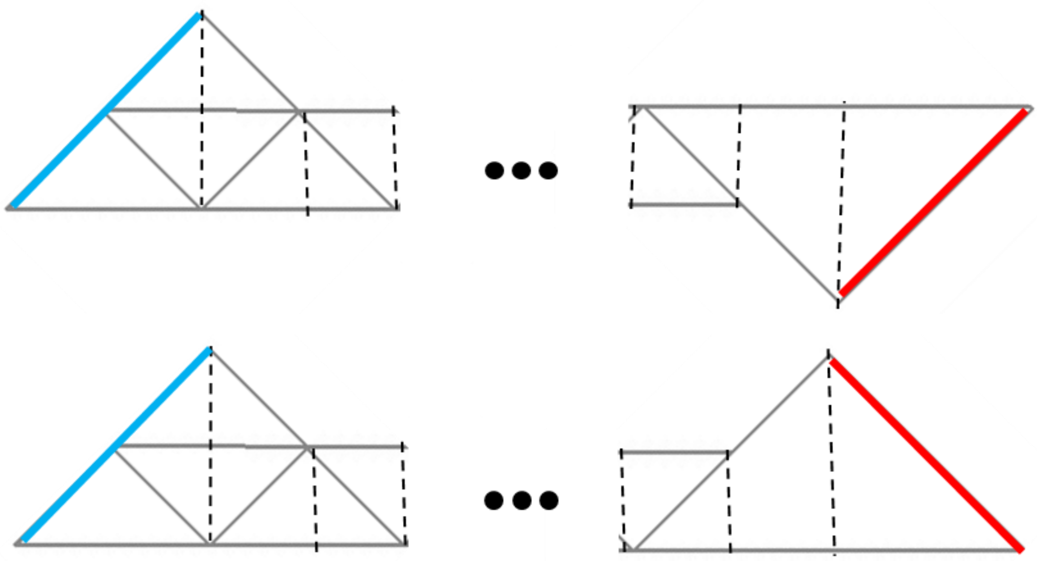


図 5.30　図 5.28 の形式的折り線図を段折りした結果。上は $n{-}j{+}2$ が偶数のとき、下は $n{-}j{+}2$ が奇数のとき。点線は折り線

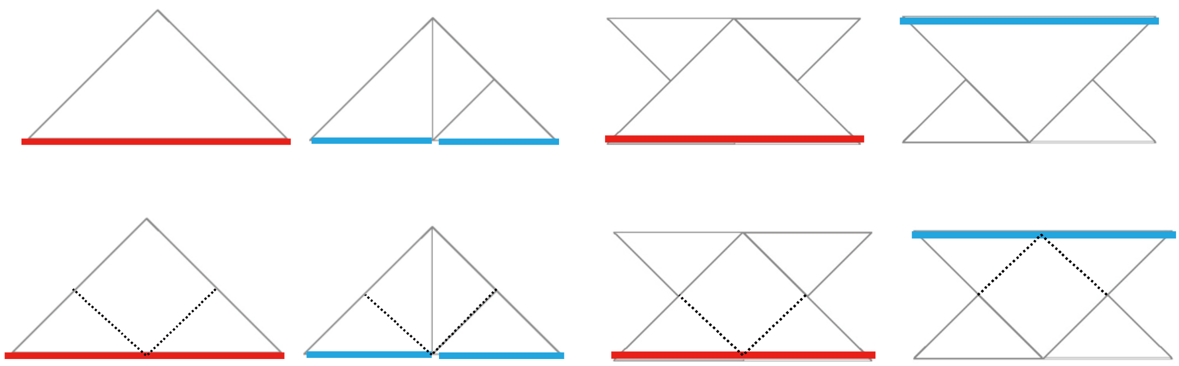


図 5.31　図 5.30 の段折り後の形状をさらに段折りした結果。左上はの 2 つは $n{-}j{+}2$ が偶数のときの結果の表裏。右上の 2 つは $n{-}j{+}2$ が奇数のとき。下は段折り後の形状に、$2\times(n{-}j{+}2)$ の形式的折り線図の 4 角の折り線（点線）を記述したもの。破線の青線は最上部から 1 つ下のレイヤーを位置する

$n = j$

$n = j$ のとき $2\times(n{-}j{+}2)$ の形式的折り線図は 2×2 となる。このとき、$n > j$ のときと同じ折り方をすると、左右上下の 4 角の折り線を折ろうとする時に e_{n+1}^{R} の上に e_n^L が重なってしまうおそれがある。そこで、$n = j$ のときは、図 5.32 のように構成面を重ねる。p_n と p_{n+1} で構成される 2×2 のパターンは 16 通りである。図 5.32 のように構成面を重ねれば、p_{n+1} の右端は基本条件 (A)、(B)、(E) を満たし、p_j の左端は基本条件 (C)、(D)、(E) を満たす。

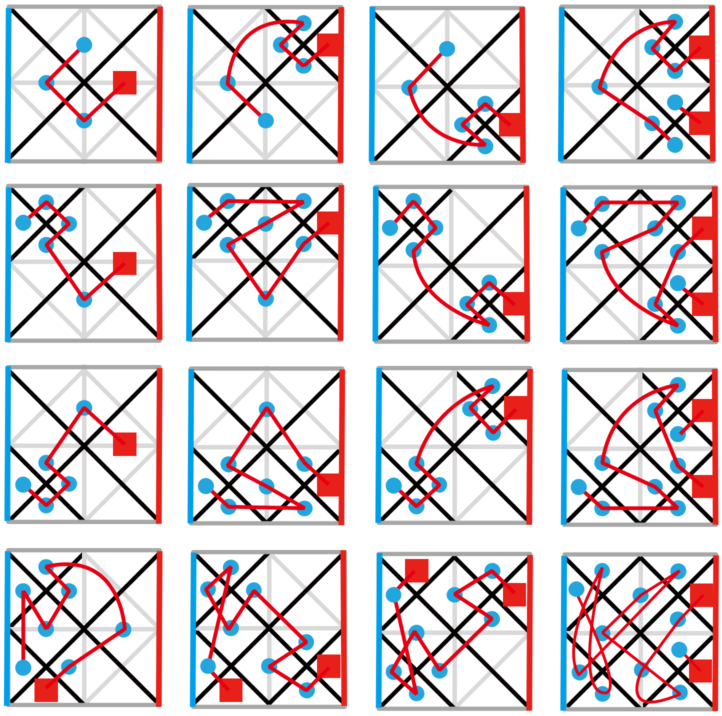


図 5.32　$n = j$ のとき、右端と左端が基本条件を満たす構成面の重なり方。赤線は p_{n+1} の右端。青線は p_n の左端

交差状態 3 が発生する可能性があるもの

$n = k$ のとき、P_n が折りたたまれており、なおかつ、p_n が右端に関する基本条件 (A)、(B)、(E) を満たして折りたたまれていると仮定する。p_n と p_{n+1} が構成する 8 価頂点 v_n が表 5.5 のパターンになる場合、「交差状態 2 が発生する可能性があるもの」に分類される。この交差を回避するためには、p_n の互いに重なり合う $e_n^{R(0,1)}$ のうち、折り線がある方を一方より上に位置させなければならない。p_n の $e_n^{R(0,1)}$ については基本条件 (A)、(B)、(E) を満たしていれば、それらの重なり順序に制約はない。つまり、p_{n+1} を接続する前は、$e_n^{R(0,1)}$ のうち、折り線がある方が一方より上に位置していない場合がある。よって、$e_n^{R(0,1)}$ の重なり順序を変更できることを示す必要がある。ここで注意しなければならないことは、$e_n^{R(0,1)}$ の重なり順序を変更するとき、P_n に含まれる p_1 から p_{n-1} に影響を与えてしまうおそれがある。そこで、e_n^L を切り、p_n を P_n から一旦分離させる。$e_n^{L(0,1)}$ の重なり順序を変更することなく、なおかつ、左端についての基本条件 (C)、(D)、(E) を満たしながら、$e_n^{R(0,1)}$ の重なり順序を変更すれば、p_n の右端の重なり順序の変更後も p_n と p_{n-1} は再び接続できる。このとき、 p_1 から p_{n-1} に影響を与えることはない。

図 5.33 は 8 価頂点 v_n が「交差状態 2 が発生する可能性があるもの」のとき、p_n となる展開図要素全てを示している。表 5.6 は図 5.33 の全 8 つの展開図要素のうち、3 つについて左端の重なり順序を変更せずに右端の重なり順序を変更した結果である。また、表 5.7 は図 5.33 の全 8 つの展開図要素のうち、4 つについて右端の重なり順序を変更した結果である。表 5.7 で示された展開図要素は $e_n^{L(0,1)}$ が互いに重なり合わない。これらの展開図要素の左端 $e_n^{L(0,1)}$ を含む構成面の重なり順序は変更されても、左に続く展開図要素に影響を与えることはない。なぜならば、表 5.7 の展開図要素とそれらの左に位置する可能性のある展開図要素が作る 8 価頂点は「基本条件を満たしていれば、交差が発生しないもの」となるからである。

p_n が表 5.8 の展開図要素である場合、左に続く展開図要素に影響を与えることなく右端

の重なり順序を変更できないものである。表 5.8 の展開図要素は 2 つの左端の折り線の有無については以下の 3 つの状態がある（図 5.34）。

(i)　2 つの左端の両者に折り線が存在しない

(ii) 2 つの左端の両者に折り線が存在する

(iii) 2 つの左端のうち、一方のみに折り線が存在する

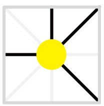
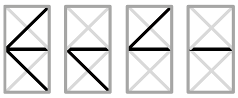
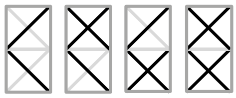
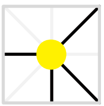
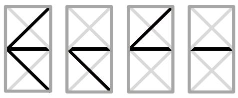
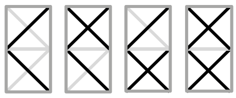
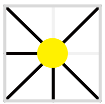
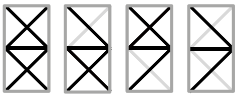
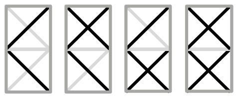
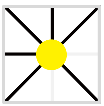
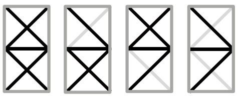
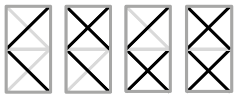
P_n が図 5.34 の展開図要素のみで構成されている場合、(i)、(ii) の状態しか発生しない。なぜならば､図 5.34 の (iii) の 1 つ左に続く展開図要素は表 5.9 の展開図要素のみだからである。ここで、図 5.34 の展開図要素について、P_n の p_n から左へ展開図要素を 1 つずつ見ていくと、以下の（ア）～（ウ）の 3 つのケースが考えられるので、それぞれについて考察する。

(ア) P_n が図 5.34 の (i) (ii) の展開図要素のみで構成されている場合

(イ) $p_{j+1}(1 \leq j < n)$ が図 5.34 の (i) か (ii) のどちらかで、p_j に図 5.34 の展開図要素以外のものが初めて現れる

(ウ) $p_{j+1}(1 \leq j < n)$ が図 5.34 の (iii) で、p_j に図 5.34 の展開図要素以外のものが初めて現れる

表 5.5　交差状態 3 が発生する可能性のあるものに分類される 8 価頂点 v_n とそれぞれの 8 価頂点を構成する p_n と p_{n+1}

v_n	p_n	p_{n+1}
		
		
		
		

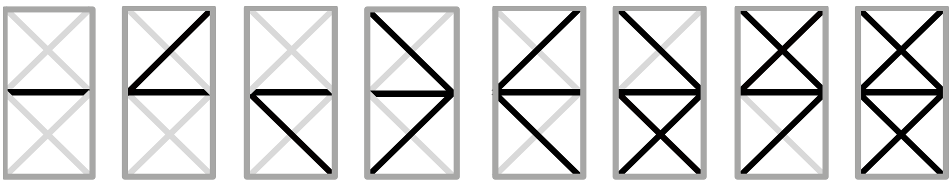


図 5.33　8 価頂点 v_n が「交差状態 3 が発生する可能性のあるもの」のとき、p_n となる展開図要素全て

表 5.6　図 5.33 の全 8 つの展開図要素の内の 3 つについて左端の重なり順序を変更せずに右端の重なり順序を変更した結果

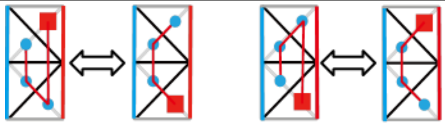
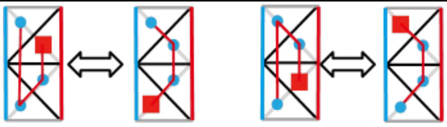
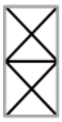
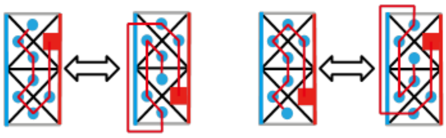
p_n	左端の重なり順序を変更せずに右端の重なり順序を変更した結果
	
	
	

表 5.7　図 5.33 の全 8 つ展開図要素の内の 4 つについて右端の重なり順序を変更した結果

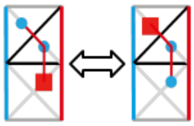
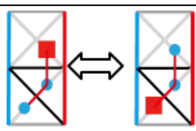
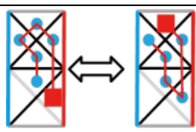
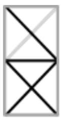
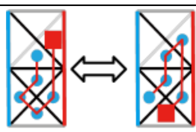
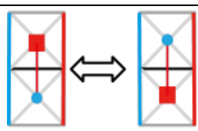
p_n	右端の重なり順序を変更した結果
	
	
	
	

表 5.8　図 5.33 の全 8 つの展開図要素のうち、左に続く展開図要素に影響を与えることなく右端の重なり順序を変更できないもの

p_n	右端の重なり順序の変更結果（左に続く展開図要素に影響を与えてしまう）
	

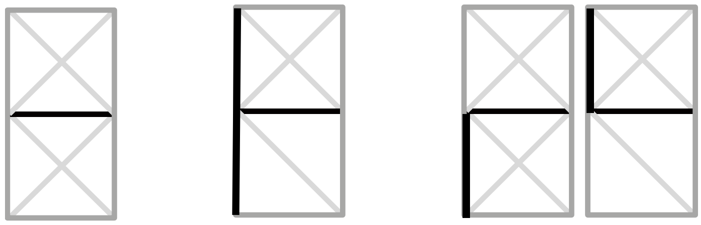
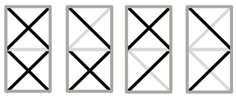
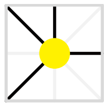
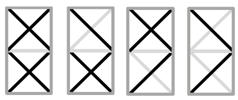
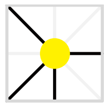


図 5.34　右端の重なり順序の変更ができない展開図要素について、2 つの左端の折り線の有無のケース

表 5.9　図 5.34 の (c) の 1 つ左に位置する展開図要素とそれらが接続したときの 8 価頂点

図 5.34 の (c) の 1 つ左に位置する展開図要素	接続したときの 8 価頂点
	
	

(ア)について

P_n が図 5.34 の (i) (ii) の展開図要素のみで構成されている場合、紙が二層の一次元の紙として考えられる（図 5.35 の上）。ここで、(ii) の 2 つの左端に存在する折り目を $c_1, \cdots, c_{n-j+1}$ と呼ぶ。図 5.35 の上の右端の重なり順序を変更したいとき、まず紙全体を裏返す（図 5.35 の中）。次に、$c_1, \cdots, c_{n-j+1}$ に割り当てられた山谷を逆転させれば、p_n の右端の重なり順序は変更でき、なおかつ、右端に関する基本条件 (A)、(B)、(E) を満たす（図 5.35 の下）。

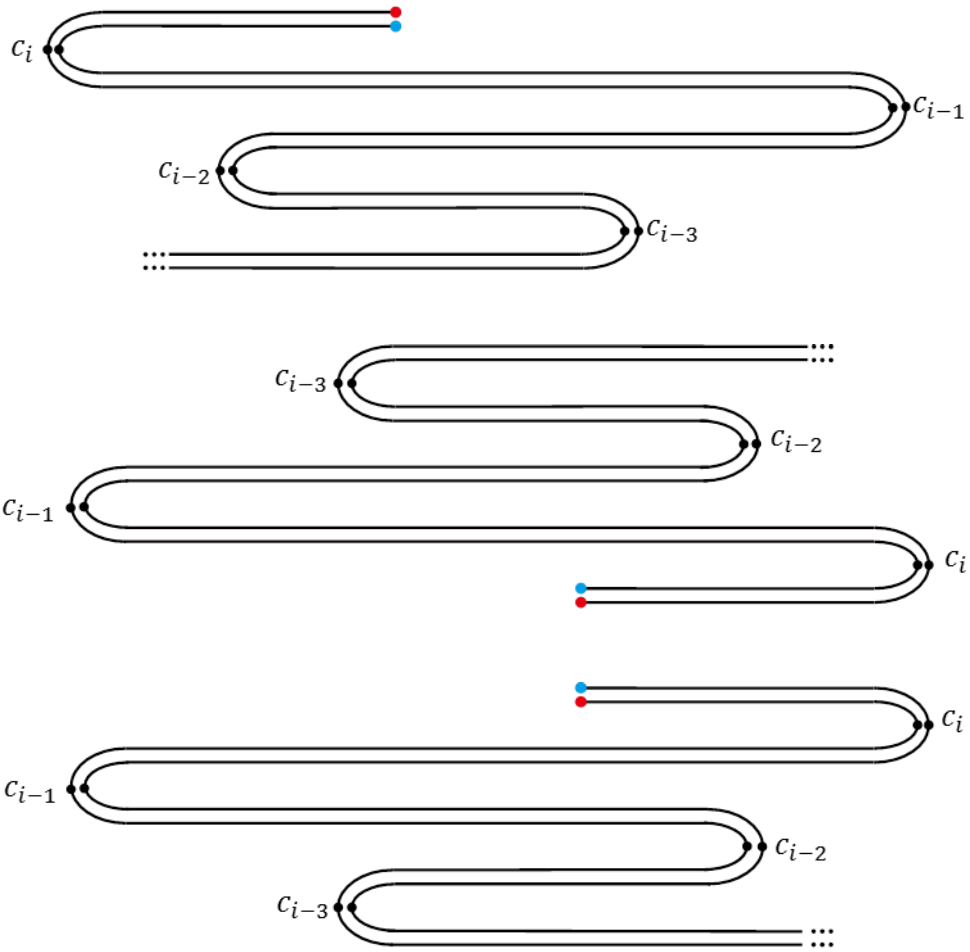


図 5.35 (上) 図 5.34 の (a)、(b) のみで構成される P_n 。(中) 本図の上を裏返した結果。(下) 本図の中の山折りと谷折りを逆転して折りたたんだ結果

(イ)について

図 5.34 の (i) (ii) の展開図要素の 1 つ左に位置する展開図要素は、図 5.34 の (i) (ii) (iii) の 3 つの展開図要素以外では、表 5.6 、表 5.7 のものとなるので、右端の重なり順序の変更が可能であることがわかっている。これで、図 5.34 の (iii) が P_n 上で存在しなければ右端の重なり順序の変更が可能であることがわかった。

(ウ)について

$p_{j+1}(1 \leq j < n)$ が図 5.34 の (iii) の場合、p_j のパターンは表 5.9 のものとなる。p_{j+1} の $e_{j+1}^{L^{(0,1)}}$ のどちらか一方には折り線がある。$e_{j+1}^{L^{(0,1)}}$ のうち、折り線があるものがないものより下に位置していなければ、p_j と交差が生じてしまう。よって、これまでに示した方法で展開図要素を接続していると考えるならば、p_n の右端の重なり順序を変更する前は、p_{j+1} の構成面は図 5.36 のように重なっているはずである。p_{j+1} が図 5.34 の (iii) であるならば、p_{j+1} に含まれる構成面は 2 つ存在する。それらの構成面の内の一方は p_j と p_{j+1} の接続部に存在する折り線を含んでおり、もう一方は含まない。ここで、 p_j と p_{j+1} の接続部に存在する折り線を含んでいる p_{j+1} の構成面を f_{crease}、折り線を含まない構成面を f_{no_crease} と呼ぶことにする。 p_n の右端の重なり順序を変更するためには、 p_{j+1} の右端の重なり順序を変更しなければならない。つまり、上から $f_{no\_crease}, f_{crease}$ の順で重ねられている 2 つの構成面を上から $f_{crease}, f_{no\_crease}$ の重なり順序に変更する必要がある。そこで、p_j と p_{j+1} が接続してできた 2×2 の形式的折り線図の構成面の重なり順序を見て、その 2×2 の形式的折り線図において交差が発生することなく p_{j+1} の 2 つの構成面が上から $f_{crease}, f_{no\_crease}$ の重なり順序に変更可能か調べる。このとき、p_{j+1} の右端と p_j の左端をそれぞれ p_j と p_{j+1} が接続してできた 2×2 の形式的折り線図の右端と左端と見なし、その 2×2 の形式的折り線図が基本条件 (A) ～ (E) を満たした折りたたみ方をしなければならない。

p_j と p_{j+1} が接続してできる 2×2 の形式的折り線図と各々が基本条件 (A) ～ (E) を満たし、なおかつ、上から $f_{crease}, f_{no\_crease}$ の順になるような構成面の重なり方は図 5.37 で示す。しかし、図 5.37 の 8 つの 2×2 の形式的折り線図の内、4 つ（表 5.10）は上から $f_{crease}, f_{no\_crease}$ の順になるように構成面を重ねられた状態で左端に関する基本条件 (C) を満たす折りたたみ方はできない。そこで、表 5.10 の 2×2 の形式的折り線図については、さらに 1 つ左に続く展開図要素 p_{j-1} を見る。つまり、p_{j-1}, p_j, p_{j+1} を連結した 2×3 の形式的折り線図の構成面の重なりを見る。表 5.11 に p_{j-1}, p_j, p_{j+1} を連結した 2×3 の形式的折り線図と各々が基本条件 (A) ～ (E) を満たし、なおかつ、上から $f_{crease}, f_{no\_crease}$ の順になるような構成面の重なり方は可能であるかを示している。表 5.11 によると、4 つの 2×3 の形式的折り線図については、特定の 4 角の折り線が存在した場合は、基本条件 (A) ～ (E) を満たし、なおかつ、上から $f_{crease}, f_{no\_crease}$ の順になるような構成面の重なり方が不可能であることが判明した。よって本章で提案された証明方法では、 p_{j+1} が図 5.34 の (iii) の場合の対応ができない。

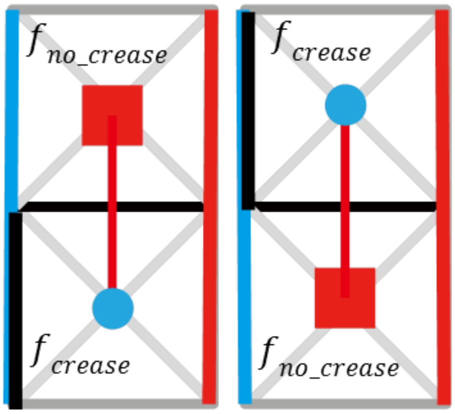


図 5.36　$\boldsymbol{p_n}$ の右端の重なり順序を変更する前は、$\boldsymbol{p_{j+1}}$ の構成面は 2 つの左端のうち、折り線があるものがないものより下に位置する

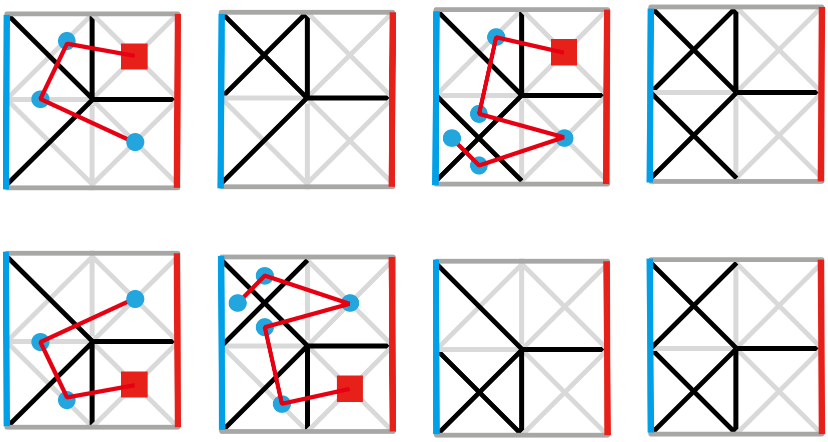


図 5.37　$\boldsymbol{p_j}$ と $\boldsymbol{p_{j+1}}$ が接続してできた 2×2 の形式的折り線図の右端と左端と見なし、その 2×2 の形式的折り線図が基本条件（A）～（E）を満たし、なおかつ、$\boldsymbol{f_{crease}}$,$\boldsymbol{f_{no\_crease}}$ の順になるような構成面の重なり方。構成面の重なり方の記述がないものについては、そのような折りたたみ方は存在しない

表 5.10　上から $f_{crease}, f_{no\_crease}$ の順になるように構成面を重ねられた状態で左端に関する基本条件（C）を満たす折りたたみ方はできない 2×2 の形式的折り線図（左列）。また、その 2×2 の形式的折り線図の 1 つ左に位置する展開図要素と構成される可能性のある 8 価頂点（左列）

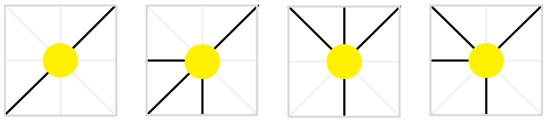
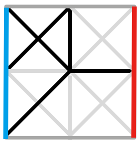
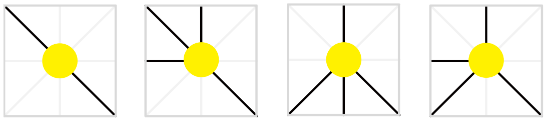
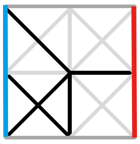
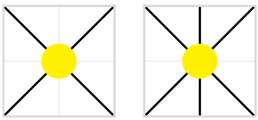
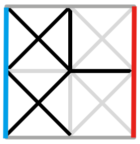
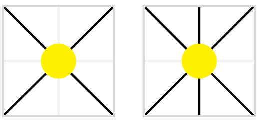
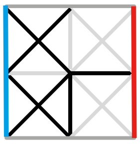
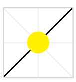
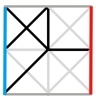
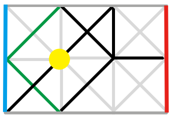
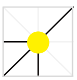
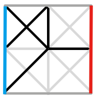
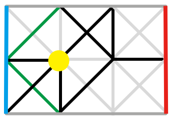
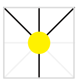
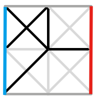
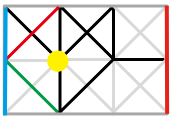
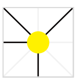
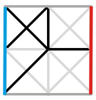
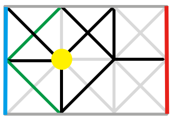
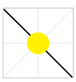
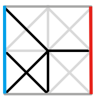
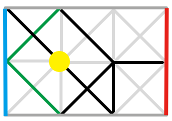
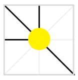
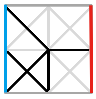
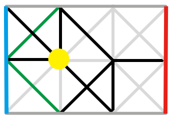
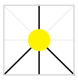
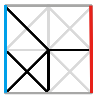
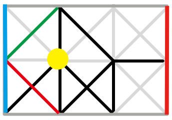
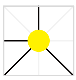
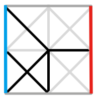
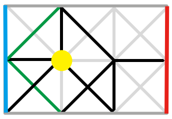
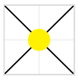
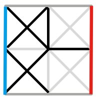
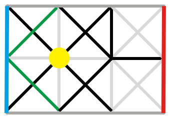
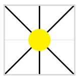
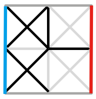
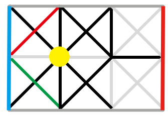
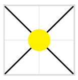
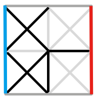
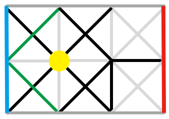
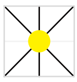
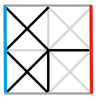
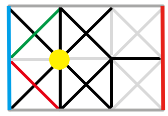
	
	
	
	

表 5.11　p_{j-1}, p_j, p_{j+1} を連結した 2×3 の形式的折り線図と各々が基本条件（A）～（E）を満たし、なおかつ、上から $f_{crease}, f_{no\_crease}$ の順になるような構成面の重なり方は可能であるか示したもの

p_{j-1}, p_j 間の 8 価頂点	p_j と p_{j+1} が接続してできた 2×2 の形式的折り線図	p_{j-1}, p_j, p_{j+1} を連結した 2×3 の形式的折り線図	基本条件を満たす折りたたみ方は可能か
			左右上下の 4 角の折り線の有無に関係なく可能
			左右上下の 4 角の折り線の有無に関係なく可能
			赤線の位置に折り線が存在すると、不可能
			左右上下の 4 角の折り線の有無に関係なく可能
			左右上下の 4 角の折り線の有無に関係なく可能

			左右上下の 4 角の折り線の有無に関係なく可能
			赤線の位置に折り線が存在すると、不可能
			左右上下の 4 角の折り線の有無に関係なく可能
			左右上下の 4 角の折り線の有無に関係なく可能
			赤線の位置に折り線が存在すると、不可能
			左右上下の 4 角の折り線の有無に関係なく可能
			赤線の位置に折り線が存在すると、不可能

5.6　まとめと考察

本章では「$2 \times n$ の 45 度系格子パターンに含まれる形式的折り線図は全て平坦折り可能である」と予想し、それを証明する方法を提案した。その証明方法は、$2 \times n$ の形式的折り線図に展開図要素を交差無しで追加可能であるかに着目したものであった。今回は帰納法を用いて、証明を試みた。しかし、項 5.5.2 の「交差状態 4 が発生する可能性のあるもの」の段落で、図 5.34 の展開図要素について、P_n の p_n から左へ展開図要素を 1 つずつ見ていくとき、3 つのケースで場合分けをしたが、「$p_{j+1} (1 \le j < n)$ が図 5.34 の (iii) で、p_j に図 5.34 の展開図要素以外のものが初めて現れる」の場合、本章で提案された証明方法では対応できないという結果になった。

現在の課題への対応方法としては、項 5.5.2 の「交差状態 4 が発生する可能性のあるもの」の（ウ）については、今のところ p_{j-1} までの展開図要素を見ているが、さらに左の展開図要素を見て、p_n と p_{n+1} が接続可能であることを示す方法が考えられる。また、単純に P_n に展開図要素を追加するだけでは、今回の命題を証明できない場合もあるため、新たな証明方法を提案する必要がある場合も考えられる。

「$2 \times n$ の 45 度系格子パターンに含まれる形式的折り線図は全て平坦折り可能である」という予想は、2×5 の形式的折り線図の平坦折り可能性を評価した結果から導き出したに過ぎないため、予想が間違っている可能性がある。本章の予想が間違っている場合は反例を示すなどの、予想が間違っていることを証明することが今後の展望として挙げられる。

第6章　結論と今後の展望

6.1　結論

本研究では折り紙の展開図設計に良く用いられる 45 度系格子パターンに着目し、形式的折り線図とそれらの平坦折り後の形状を列挙した。また、45 度系格子パターンに含まれる平坦折り可能性についても調査した。各テーマについての結論は以下に示す。

6.1.1　形式的折り線図と平坦折り後の形状の列挙

本研究では、山本ら列挙していない 2×2、3×3、及び 3×5 の 45 度系格子パターンに含まれる形式的折り線図とそれらの平坦折り後の形状の列挙を行った。2×2、3×3 の 45 度系格子パターンについては 4×4 のものに含まれているため、新しい形状を発見することはなかったが、3×5 については 4×4 の 45 度系格子パターンからでは作りだせない形状が発見された。また、入力された形状が 45 度系格子パターンから作りだせることが可能かどうか判定するためのソフトウェア CP finder を開発した。CP finder により、意味を持った形状（アルファベットと数字を模したもの）を発見することができた。加えて、アルファベットと数字を模した形状が発見されたため、テキストを入力し、その文字列に対応した形状が出力される Web アプリケーション ORIGAMI FONT を開発した。ORIGAMI FONT は山谷付き展開図のみを表示することが可能であるので、文字を展開図で表現するというパズル的な楽しさがある。

6.1.2　平坦折り後の形状の実現可能性

本研究で提案された形式的折り線図の平坦折り可能性の評価手法により、2×2、3×3、4×4 及び 3×5 の 45 度系格子パターンから作りだされる平坦折り後の形状が全て実現可能であることが確認された。形状の実現可能性の評価実験の過程で平坦折りできない形式的折り線図が発見し、更に、45 度系格子パターンに含まれる最小（正方形領域の数が最も少ない）かつ最も単純な（折り線数と頂点数が最少）平坦折りできない形式的折り線図が特定された。特定された 45 度系格子パターンに含まれる最小かつ最も単純な形式的折り線図は紙の衝突により平坦折り不可能であり、その折り構造は折り線のなす角度が 45 度単位で構成される。このような展開図は筆者が知る限りでは、これまでに発見されていなかった。

6.1.3　2×n の形式的折り線図の平坦折り可能性

本研究によって、45 度系格子パターンに含まれる形式的折り線図は 2×2、2×3、及び 2×4 については全て平坦折り可能であるかことが判明した。また、2×5 の全ての形式的折り線図を列挙し、それらの平坦折り可能性の評価実験を行い、現在計算中だが今のところ平坦折りできないものは見つかっていない。そこで、「2×n の 45 度系格子パターンに含まれる形式的折り線図は全て平坦折り可能である」と予想し、証明を試みた。その証明方法は、2×n の形式的折り線図に展開図要素を交差無しで追加可能であるかに着目したものであった。しかし、この方法では本命題を証明できない場合があるため、今後は証明を改善する必要がある。

6.2 今後の展望

本研究により、未発見の平坦折り後の形状が列挙された。列挙された形状の中にはアルファベットと数字を模した意味を持つ形状を含まれていた。この結果より、理論的な設計ではなく計算機の性能を活用した形状の列挙という手段でも、新たな形状を発見できることが示された。工学的な分野においても 1 つの平らな素材から形状を作りだす技術は研究されているため、形状の列挙は、そのような分野にも貢献できる可能性がある。本研究で特定の折り方や展開図から作りだされる形状の列挙に関する研究を開拓したが、折り紙の形状の列挙の研究はまだ少ないため、この研究は更なる発展の余地がある。

また、本研究によって筆者が知る限りではこれまでに例がない展開図を発見できた。その展開図は、平坦折り可能な山谷割当を持つが、折る際の紙の衝突により平坦折りできないものである。更に、その展開図は折り線のなす角度が 45 度単位で構成される。局所平坦折り可能条件を満たすが平坦折りできない展開図の設計方法は知られていない。また、平坦折り可能な山谷割当を持つかの判定は多項式時間で計算できるが、山谷割当を持つが平坦折りできないことを判定するための効率的なアルゴリズムは存在しない。本研究で平坦折り可能な山谷割当を持つが、折る際の紙の衝突により平坦折りできない展開図を発見できたのは、列挙による成果といえる。今後も折り紙の列挙に関する研究を行えば、これまでに例がない展開図を発見できる可能性がある。

「$2\times n$ の 45 度系格子パターンに含まれる形式的折り線図は全て平坦折り可能である」ことの証明については、本論文で示された課題点を解決し、証明を完成させることが今後の展望である。しかし、本研究の予想が間違っている可能性もあるため、その場合は反例を示すなど、予想が間違っていることを証明することが展望となる。

謝辞

本研究を進めるにあたり、本学大学院システム情報工学研究科の三谷純教授をはじめとし、金森由博、遠藤結城助教には多くのご指導・ご協力をいただきました。ここに深く感謝の意を表します。三谷純教授のお話は研究に関することだけではなく、今後の人生の歩み方の参考となりました。

本研究は当研究室の OB である山本陽平氏の成果を引継ぎましたが、山本陽平氏は時折、研究室に来られ、プログラミングの指導や研究に関する議論など、本研究に対する多くのご協力をいただきました。

また、日本折紙学会の会員の皆様には研究集会で貴重なご指導とアイデアをいただきました。更には、マサチューセッツ工科大学のエリック・ドメイン先生には ORIGAMI FONT のアイデアをいただき、実装したシステムをご自身のホームページ上で紹介までしていただきました。

非数値処理アルゴリズム研究室の皆様には多くの貴重なご意見をいただきました。皆様と過ごした 2 年間はとても楽しかったです。

最後に、これまでの人生を支えてくれた両親と 2 人の兄に心から感謝いたします。

参考文献

[1] 鶴田直也，三谷純，金森由博 ，福井幸男，“形状列挙に基づく幼児向け折り紙作品の創作支援システム,” *折り紙の科学,* 第 巻 2, 第 1, pp. 33-44, 2012.

[2] E. Hawkes, B. An, N. M. Benbernou, H. Tanaka, S. Kim, E. D. Demaine, D. Rus and R. J. Wood, "Programmable matter by folding," *Proceedings of the National Academy of Sciences, DOI: 10.1073/pnas.0914069107,* 2010.

[3] S. Miyashita, S. Guitron, M. Ludersdorfer, C. Sung and D. Rus, "An Untethered Miniature Origami Robot that Self-folds, Walks, Swims, and Degrades," in *IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, 2015, pp. 1490-1496.

[4] 山本陽平 ，三谷純，“45°系格子パターンから作りだされる平坦折り形状の列挙,” *折り紙の科学,* 第 巻 4, 第 1, pp. 23-33, 2015.

[5] M. Bern and B. Hayes, "The Complexity of Flat Origami," in *Proceedings of the Seventh Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, 1996, pp. 175-183.

[6] Y. Matsukawa, Y. Yamamoto and J. Mitani, "Enumeration of Flat-foldable Crease Patterns in the Square/Diagonal Grid and Their Folded Shapes," in *Proc. of 17th International Conference on Geometry and Graphics (ICGG2016)*, Article #033, Beijing, China.

[7] 松川剛久 ，三谷純，“４５度系格子パターンに含まれる形式的折り線図の平坦折り可能性について,” *折紙探偵団,* 第 巻 26, 第 5, pp. 13-15, 2016.

[8] 松川剛久，金森由博 ，三谷純，“45°系格子パターンに含まれる形式的折り線図の平坦折り可能性評価手法,” *情報処理学会第 78 回全国大会講演論文集 (1)*, 横浜, 2016, pp. 447-448.

[9] 鶴田直也，三谷純，金森由博 ，福井幸男，“幼児向け折り紙作品の創作支援システム,” *情報処理学会シンポジウム論文集,* 第 巻 2011, 第 3, pp. 49-56, 2011.

[10] T. C. Hull, "On the Mathematics of Flat Origamis," *Congressus Numerantium,* vol. 100, pp. 215-224, 1994.

[11] 川崎敏和，バラと折り紙と数学と，森北出版株式会社, 1998.

[12] J. Ginepro and T. C. Hull, "Counting Miura-ori Phantom Foldings," in *Program and Abstracts of The 6th International Meeting on Origami in Science, Mathematics and Education*, 2014, p. 41.

[13] E. D. Demaine and J. O'Rourke, Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra, cambridge University Press, 2007.

[14] R. D. Lardner, A treatise on geometry and its application in the arts, London, Printed for Longman, Orme, Brown, Green, & Longmans, and John Taylor, 1840, p. 1840.

[15] T. S. Row, Geometric Exercises in Paper, Dover, 1966(1893 年の書籍の復刻).

[16] M. P. Beloch, Sulla risoluzione dei problemi di terzo e quarto grado col metodo del

ripiegamento della carta, Scritti matematici offerti a Luigi Berzolari, 1936.

[17] S. A. Robertson, "Isometric folding of Riemannian manifolids," *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh,* vol. 79, no. 3-4, pp. 275-284, 1977-78.

[18] J. Justin, "Towards a Mathematical Theory of Origami," in *Proceedings of the Second International Meeting of Origami Science and Scientific Origami*, 1997, pp. 15-29.

[19] T. Kawasaki, "On the Relation Between Moutain-creases and Valley-creases of a Flat Origami," in *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*, 1989, pp. 229-237.

[20] E. D. Demaine and M. L. Demaine, "Resent results in computational origami," in *Origami3: The Third International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education*, A K Peters, 2002, pp. 3-16.

[21] T. C. Hull, project Origami, CRC Press, 2013.

[22] H. A. Akitaya, K. C. Cheung, E. D. Demaine, T. Horiyama, T. C. Hull, J. S. Ku, T. Tachi and R. Uehara, "Box Pleating is Hard," 2015. [Online]. Available: http://erikdemaine.org/papers/BoxPleatingHard_JCDCGG2015/paper.pdf. [Accessed Jun. 2016].

[23] E. M. Arkin, M. A. Bender, E. D. Demaine, M. L. Demaine, S. S. J. S. B. Mitchell and S. S. Skiena, "When can you fold a map?," *Comput. Geom. Theory. Appl.,* vol. 29, no. 1, pp. 166-195, 2004.

[24] T. C. Hull, "The Combinatorics of Flat Folds: A Survey," in *Origami3: The Third International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education*, 2002.

[25] 三谷純, “展開図から推定される折りたたみ形態の数え上げ手法,” *日本図学会, 図学研究,* 第 巻 40, 第 2, pp. 39-44, 2006.

[26] 三谷純, “平坦折り折紙から再現される形態数の数え上げ手法,” *日本図学会, 図学研究,* 第 巻 41, 第 1, pp. 27-33, 2007.

[27] E. D. Demaine, D. Eppstein, A. Hesterberg, H. Ito, A. Lubiw, R. Uehara and Y. Uno, "Folding a paper strip to minimize thickness," *Journal of Discrete Algorithms,* vol. 36, pp. 18-26, 2016.

[28] T. Umesato, T. Saitoh, R. Uehara, H. Ito and Y. Okamoto, "The complexity of the stamp folding problem," *Theoretical Computer Science,* vol. 497, pp. 13-19, 2013.

[29] T. C. Hull, "Counting Mountain-Valley Assignments for Flat Folds," *Ars Combinatoria,* vol. 67, pp. 175-188, 2003.

[30] T. C. Hull, "Coloring connections with counting mountain-valley assignments," in *Origami6: Proceedings of the 6th International Conference on Origami in Science, Mathematics and Education*, 2016, pp. 3-10.

[31] P. D. Francesco, "Folding and coloring problems in mathematics and physics," *Bulletin of the American Mathematical Society,* vol. 37, no. 3, pp. 251-307, 2000.

[32] R. J. Lang, "TreeMaker 4.0: A Program for Origami Design," [Online]. Available:

http://www.langorigami.com/science/computational/treemaker/treemaker.php. [Accessed 5 Dec. 2016].

[33] E. Gjerde, ORIGAMI TESSELLATIONS Awe-inspiring Geometric designs, A K Peters, Ltd, 2009.

[34] A. Bateman, "Tess: origami tessellation software," [Online]. Available: http://www.papermosaics.co.uk/software.html. [Accessed 10 Dec. 2016].

[35] 三谷純, “ORIPA: Origami Pattern Editor 折紙展開図エディタ,” [オンライン]. Available: http://mitani.cs.tsukuba.ac.jp/oripa/.

[36] J. Mitani, "Development of origami pattern editor (ORIPA) and a method for estimating a folded configuration of origami from the crease pattern," *Journal of Information Processing Society of Japan,*, vol. 48, no. 9, pp. 3309-3317, 2007.

[37] N. Tsuruta, J. Mitani, Y. Kanamori and Y. Fukui, "Simple Flat Origami Exploration," in *Origami6: Proceedings of the 6th International Conference on Origami in Science, Mathematics and Education*, 2016, pp. 513-521.

[38] T. Tachi, "Origamizing Polyhedral Surfaces," *IEEE Transactions on Visualization and Computer Graphics,* vol. 16, no. 2, pp. 298-311, 2010.

[39] Y. Zhao, Yoshihiro Kanamori and J. Mitani, "Geometry of axisymmetric 3D origami consisting of triangle facets," in *Proc. of the 17th International Conference on Geometry and Graphics (ICGG2016), Article #011*, Bijing, China.

[40] D. A. Huffman, "Curvature and creases: a primer on paper," *IEEE Transactions on Computers,* Vols. C-25, no. 10, pp. 1010-1019, 1976.

[41] J. Mitani, "Recognition, modeling and rendering method for origami using 2d bar codes," in *Origami 4: Fourth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education*, 2009, pp. 251-258.

[42] J. Mitani and T. Igarashi, "Interactive design of planar curved folding by reflection," in *Proceedings of the Pacific Conference on Computer Graphics and Applications - Short Papers*, September 21st - 23rd 2011, p. 77–81.

[43] K. Miura, "A note on intrinsic geometry of origami," in *Proceedings of the First International Meeting of Origami Science and Technology*, 1989, pp. 239-249.

[44] D. J. Balkcom, E. D. Demaine and M. L. Demaine, "Folding paper shopping bags," in *Proceedings of 14th Annual Fall Workshop Computational Geometry*, Cambridge, massachusetts, 2004, pp. 14-15.

[45] T. Tachi, "Rigid Origami Simulator," [Online]. Available: http://www.tsg.ne.jp/TT/software/index.html#rigid_origami. [Accessed 11 Dec. 2016].

[46] T. Tachi, "Simulation of Rigid Origami," in *Origami 4: Fourth International Meeting of Origami Science, Mathematics, and Education*, 2009, pp. 175-187.

[47] T. Tachi, "Freeform Origami," [Online]. Available: http://www.tsg.ne.jp/TT/software/index.html#ffo. [Accessed 11 Dec. 2016].

[48] 神谷哲史, “22.5 度系の比の折り出し,” *折紙探偵団,* 第 巻 20, 第 1, pp. 11-13, 2009.

[49] 西川誠司, “15° 系から折り紙を眺める,” *折紙探偵団,* 第 巻 17, 第 3, pp. 11-13, 2006.

[50] 前川淳, 本格折り紙√2, 日貿出版社, 2009.

[51] “用途別分類表｜製品紹介｜株式会社ジャバラ／JABARA CO.,LTD.,” 株式会社ジャバラ ／ JABARA CO.,LTD., [オンライン]. Available: http://www.jabara.co.jp/product/?c=list_use. [アクセス日: 4 Jan. 2016].

[52] T. Tachi and D. E. D, "Degenerative Coordinates in 22.5°Grid System," in *Origami5: Proceedings of the 5th International Conference on Origami in Science, Mathematics and Education*, 2010.

[53] N. M. Benbernou, E. D. Demaine, M. L. Demaine and A. Ovadya, "Universal hinge patterns to fold orthogonal shapes," in *Origami5: Proceedings of the 5th International Conference on Origami in Science, Mathematics and Education*, 2010, pp. 405-420.

[54] R. J. Lang, Origami Design Sercrets, A K Peters, Ltd, 2003.

[55] H. Akitaya, J. Mitani, Y. Kanamori and Y. Fukui, "Generating Folding Sequences from Crease Patterns of Flat-Foldable Origami," in *ACM SIGGRAPH 2013 Posters*, Anaheim, CA, 2013.

[56] N. Tsuruta, J. Mitani, Y. Kanamori and Y. Fukui, "A CAD System for Diagramming Origami with Prediction of Folding Processes," in *Origami5: Proceedings of the 5th International Conference on Origami in Science, Mathematics and Education*, 2011, pp. 335-345.

[57] 長谷川太市郎, マジカルおりがみ アルファベットと数字, 誠文堂新光社, 1996.

[58] E. D. Demaine, M. L. Demaine and J. Ku, "Folding Any Orthogonal Maze," in *Origami5: Proceedings of the 5th International Conference on Origami in Science, Mathematics and Education*, 2010, pp. 449-454.

[59] E. D. Demaine, M. L. Demaine and J. Ku, "Origami Maze Puzzle Font," in *Exchange Book of the 9th Gathering for Gardner*, Atlanta, Georgia, 2010.

[60] E. Demaine and M. L. Demaine, "Mathematical and Puzzle Fonts/Typefaces," [Online]. Available: http://erikdemaine.org/fonts/. [Accessed 5 Dec. 2016].

[61] E. D. Demaine and M. L. Demaine, "Hinged Dissection of the Alphabet," *Journal of Recreational Mathematics,* vol. 31, no. 3, pp. 204-207, 2003.

[62] E. D. Demaine, M. L. Demaine and B. Palop, "Conveyer-Belt Alphabet," in *Findings in Elasticity, edited by Hester Aardse and Astrid van Baalen*, 2010, pp. 86-89.

[63] I. Keiichiro, " ちょいとパズルでも Origami," [Online]. Available: http://puzzlewillbeplayed.com/-/origami.xml. [Accessed 7 Dec. 2016].

[64] K. Miura, " Map fold a la miura style, its physical characteristics and application to the space science," in *Research of Pattern Formation*, KTK Scientific Publishers, 1989, pp. 77-90.

[65] C. Cromvik and K. Eriksson, "Airbag folding based on origami mathematics," in *Origami 4: Fourth International Meeting of Origami Science, Mathematics*, 2009, pp. 129-139.

[66] K. Kuribayashi, K. Tsuchiya, Z. You, D. Tomus, M. Umemoto, T. Ito and M. Sasaki, "Self-deployable origami stent grafts as a biomedical application of Ni-rich TiNi shape memory alloy foil," in *Materials Science and Engineering: A*, 2006, pp. 131-137.

[67] "Cardborigami," Cardborigami, Inc., 2016. [Online]. Available: http://www.cardborigami.org/#statistics. [Accessed 12 Dec. 2016].

[68] "Sa™: The Umbrella Reimagined," KICKSTARTER, [オンライン]. Available: https://www.kickstarter.com/projects/860103721/satm-the-umbrella-reimagined. [アクセス日: 12 Dec. 2016].

[69] 三浦公亮, "ＩＳＡＳニュース," ISAS, 9 2002. [オンライン]. Available: http://www.isas.ac.jp/ISASnews/No.258/shochu.html. [アクセス日: 12 Dec. 2016].

[70] 趙希禄, 胡亜波 , 萩原一郎, "衝突方向のばらつきを考慮した半割り型自動車サイドメンバーの圧潰エネルギー吸収性能のロバスト最適化," *日本機械学会論文集 A 編,* 第 巻 76, 第 767, pp. 868-875, 2010.

[71] Y. Liu, J. K. Boyles, J. Genzer and M. D. Dickey, "Self-folding of polymer sheets using local light absorption," *Soft Matter,* vol. 8, no. 6, pp. 1764-1769, 2012.

[72] S. Felton, M. Tolley, E. D. Demaine, D. Rus and R. Wood, "A method for building self-folding machines," *Science,* vol. 345, no. 6197, pp. 644-646, 2014.

[73] 松川剛久, 山本陽平 , 三谷純, "Origami Font(4x4 grid)," 2016. [オンライン]. Available: http://www.npal.cs.tsukuba.ac.jp/~matsukawa/index_font_4x4.html.

[74] 松川剛久 , 三谷純, "Origami Font(3x5 grid)," 2016. [オンライン]. Available: http://www.npal.cs.tsukuba.ac.jp/~matsukawa/index_font.html.